אלגבראות לי

ⓒ ארזים

17 ביוני 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 מערכת השורשים באלגברת לי פשוטה למחצה ביחס לתת אלגברת קרטן מתפצלת מעל השדה

בשיעור הקודם דיברנו על מערכת שורשים - תת קבוצה R של מרחב מכפלה פנימית E ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$ שמקיימת את הדרישות הבאות:

1. $R \subset E$ סופית ופורשת את E, $0 \notin R$.
2. לכל $\alpha \in R$ גם $-\alpha \in R$, וכן $\pm\alpha$ הן הכפולות היחידות של α שנמצאות בתוך R.
3. לכל $\alpha \in R$, השיקוף $s_\alpha(R) = R$, כאשר הגדרנו

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

4. לכל $\alpha,\beta \in R$, המספרים $2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ הם שלמים.

היום נראה כל מיני תוצאות שונות ומשונות על זה.

טענה 1.1 יהיו $\alpha,\beta \in R$ לא פרופורציונים.

1. אם $(\alpha,\beta) > 0$ (זווית חדה), אזי $\alpha - \beta \in R$.
2. אם $(\alpha,\beta) < 0$ (זווית קהה), אזי $\alpha + \beta \in R$.

הוכחה:

$$(\alpha,\beta) = ||\alpha||\,||\beta||\cos\theta$$
$$\frac{2(\alpha,\beta)}{||\alpha||^2} = \frac{2||\beta||}{||\alpha||}\cos\theta \in \mathbb{Z}$$
$$\frac{2(\alpha,\beta)}{||\beta||^2} = \frac{2||\alpha||}{||\beta||}\cos\theta \in \mathbb{Z}$$

נכפול את שני האחרונים ונקבל

$$4\cos^2\theta \in \mathbb{Z}$$

כלומר נקבל כי

$$4\cos^2\theta \in \{0,1,2,3,4\}$$

α, β לא פרופורציונים, כלומר $\cos\theta \neq \pm 1$. נקבל כי בהכרח

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}, \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \{1,2,3\}$$

לא משנה איזה מהם, בעזרת השיקופים נוכל לקבל כי $\alpha-\beta$ או $\beta-\alpha$ שורש. סעיף 2 נובע מהסעיף הזה כאשר לוקחים $-\beta$. ■

טענה 1.2 כרגיל, יש רצף מספרים שלמים $[-r,q]$ כך שכל שלם שם m מקיים

$$\beta + m\alpha \in R$$

הוכחה: אחרת, ניקח i להיות כזה שלא מקיים את זה. יש $-r < l \leq i \leq s < q$ שמקיימים

$$\begin{aligned}\beta + s\alpha &\notin R \\ \beta + (s+1)\alpha &\in R \\ \beta + l\alpha &\notin R \\ \beta + (l-1)\alpha &\in R\end{aligned}$$

אם כן,

$$\begin{aligned}\beta + (s+1)\alpha, \alpha &\in R \\ \beta + s\alpha &\notin R\end{aligned}$$

מהטענה הקודמת נקבל כי

$$(\beta + (s+1)\alpha, \alpha) \leq 0$$

באותה צורה נקבל כי

$$(\beta + (l-1)\alpha, \alpha) \geq 0$$

ולכן

$$0 \leq (\beta + (l-1)\alpha, \alpha) = (\beta,\alpha) + (l-1)||\alpha||^2 < (\beta,\alpha) + (s+1)||\alpha||^2 = (\beta + (s+1)\alpha, \alpha) \leq 0$$

בסתירה. ■

נסמן את השרשת

$$S_{\beta,\alpha} = \{\beta - r\alpha, \beta + (-r+1)\alpha, \ldots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta + q\alpha\}$$

וכעת מתקיים

$$s_\alpha\left(S_{\beta,\alpha}\right)=S_{\beta,\alpha}$$

שכן

$$\begin{aligned} s_\alpha(\beta+m\alpha) &= s_\alpha(\beta)+ms_\alpha(\alpha)=s_\alpha(\beta)-m\alpha= \\ &= m-\left(\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}+m\right)\alpha\in S_{\beta,\alpha} \end{aligned}$$

המספר בסוגריים שלם מהתכונות, וזה שייך לשרשרת בגלל שזה שורש (תמונה של שורש תחת שיקוף). ברור כי s_α הופך את כיוון השרשרת, ולכן s_α שולח את הקצה השמאלי לקצה הימני:

$$\begin{aligned} s_\alpha(\beta-r\alpha) &= \beta+q\alpha \\ \beta-\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha+r\alpha &= \beta+r\alpha \\ r-q &= \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \end{aligned}$$

טענה 1.3 האורך של $S_{\beta,\alpha}$ הוא לכל היותר 4.

הוכחה: נסמן $\beta'=\beta-r\alpha$. נתבונן בשרשרת α דרך β':

$$\beta',\beta'+\alpha,\ldots,\beta'+(q+r)\alpha$$

כאן $r'=0$, $q'=q+r$. כעת

$$-(q+r)=r'-q'=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$$

כלומר $(q+r)<4$, כלומר

$$|S_{\alpha,\beta}|=q+r+1\leq 4$$

■

הגדרה 1.4 תת קבוצה $\Delta\subset R$ תקרא בסיס למערכת השורשים R אם היא מקיימת:

1. Δ בסיס של E מעל $\mathbb{R}$.
2. לכל $\alpha\in R$, כאשר נכתוב

$$\alpha=\sum_{\gamma\in\Delta}c_i\gamma$$

אזי המקדמים c_γ שלמים כולם וכן $c_\gamma\geq 0$ לכל $\gamma\in\Delta$ או $c_\gamma\leq 0$ לכל $\gamma\in\Delta$.

דוגמא בשיעור שעבר דיברנו על $A_n = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ במרחב $E = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 0\right\}$.
ניקח

$$\Delta = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$$

זה בסיס של E, וגם של R - שכן

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \cdots + (e_{j-1} - e_j)$$

אם $i < j$, למשל.

אם $\Delta \subset R$ אזי לכל $\alpha \neq \beta \in \Delta$ ההפרש $\alpha - \beta \notin R$, ומהטענה הקודמת נקבל $(\alpha, \beta) \leq 0$.

משפט 1.5 קיים למערכת השורשים R בסיס.

הוכחה: לכל $\alpha \in R$ נסמן

$$P_\alpha = \alpha^\perp = \{v \in E \mid (v, \alpha) = 0\}$$

ווקטורים

$$\gamma \in E \backslash \bigcup_{\alpha \in R} P_\alpha$$

נקראים **רגולרים** ומקיימים $(\gamma, \alpha) \neq 0$ לכל $\alpha \in R$. נכתוב

$$R^+(\gamma) = \{\alpha \in R \mid (\gamma, \alpha) > 0\}$$
$$R^-(\gamma) = \{\alpha \in R \mid (\gamma, \alpha) < 0\}$$

כאשר γ כמובן רגולרי. אזי

$$R = R^+(\gamma) \biguplus R^-(\gamma)$$

כעת, יהי $\gamma \in E$ רגולרי. נתבונן בקבוצה

$$\Delta(\gamma) = \left\{\alpha \in R^+(\gamma) \mid \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R^+(\gamma) \;\; \alpha \neq \alpha_1 + \alpha_2\right\}$$

כלומר שורשים שאי אפשר לכתוב כסכום של כסכום של שניים אחרים (מתוך $R^+(\gamma)$). כעת יהי $\alpha_0 \in R^+(\gamma)$ עבורו (γ, α_0) מינימלית. ברור כי $\alpha_0 \in \Delta(\gamma)$ ולכן $\Delta(\gamma) \neq \emptyset$.

1. כל שורש מתוך $R^+(\gamma)$ הוא צרוף לינארי של איברי $\Delta(\gamma)$ במקדמים מתוך $\mathbb{Z}^+$. אם זה לא כך, נבחר $\alpha_1 \in R^+(\gamma)$ שאינו צירוף כזה, עבורו (γ, α_1) מינימלית. כמובן, $\alpha_1 \notin \Delta(\gamma)$, ולכן אפשר לכתוב $\alpha_1 = \alpha_1' + \alpha_1''$, כאשר $\alpha_1', \alpha_1'' \in R^+(\gamma)$. מתקיים $(\gamma, \alpha_1'), (\gamma, \alpha_1'') < (\gamma, \alpha_1)$ ולכן אפשר להציג את α_1', α_1'' כצירוף שתיארנו קודם, וזו סתירה.

2. $\Delta(\gamma)$ בלתי תלויה מעל $\mathbb{R}$. מראים כי לכל $\alpha \neq \beta \in \Delta(\gamma)$ מתקיים $(\alpha, \beta) \leq 0$, כי אחרת, מהטענה הראשונה היום, $\alpha - \beta \in R$, כלומר $\alpha - \beta \in R^+(\gamma)$ או $\alpha - \beta \in R^-(\gamma)$. אם הראשון נכון אזי

$$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$$

פירוק של α לסכום של שני איברי $R^+(\gamma)$ בסתירה (הוא מתוך $\Delta(\gamma)$). במקרה השני נקבל פירוק של β וסתירה גם כן. **תרגיל**: בהינתן העובדה כי $(\alpha,\beta)\leq 0$ לכל $\alpha\neq\beta\in\Delta(\gamma)$ להוכיח כי $\Delta(\gamma)$ בלתי תלוייה (כותבים תלות, מבודדים מקדמים חיוביים ושליליים, מחשבים נורמה על ידי מכפלה פנימית של שני האגפים, ונקבל סכום של דברים אי שליליים ששווים אפס).

בסך הכל קיבלנו כי $\Delta(\gamma)$ בסיס של R. קל להראות שכך נראה כל בסיס (נבנה מאיבר רגולרי). ■

נקבע בסיס $\Delta\subset R$ למערכת. נסמן R^+ את איברי R שהמקדמים בצירוף שלהם מאיברי Δ הם חיוביים. נסמן גם $R^-=-R^+$ בהתאם. איברי Δ נקראים שורשים פשוטים, איברי R^+ שורשים חיוביים, ואיברי R^- שורשים שליליים.

טענה 1.6 יהי $\alpha\in R^+\backslash\Delta$. אזי יש $\beta\in\Delta$ שעבורו $\alpha-\beta\in R^+$.

הוכחה: נכתוב

$$\alpha=\sum_{\beta\in\Delta}a_\beta\beta$$

כאשר a_β שלמים אי־שליליים שלא כולם אפס. יש לפחות $\beta_1,\beta_2\in\Delta$ שעבורם $a_{\beta_1},a_{\beta_2}>0$. כעת

$$0<||\alpha||^2=\sum_{\beta\in\Delta}a_\beta(\beta,\alpha)$$

כלומר יש $\beta_0\in\Delta$ כלשהו עבורו $a_{\beta_0}(\beta_0,\alpha)>0$, ומכאן $a_{\beta_0}>0$ וכן $(\beta_0,\alpha)>0$. מהטענה הראשונה נקבל כי $\alpha-\beta_0\in R$. כעת

$$\alpha-\beta_0=(a_{\beta_0}-1)\beta_0+\sum_{\beta_0\neq\beta\in\Delta}a_\beta\beta$$

ולכן יש $\beta_0\neq\beta\in\Delta$ כלשהו עבורו $a_\beta\geq 1$, כי $\alpha\in R^+\backslash\Delta$. לכן נקבל שגם כל שאר המקדמים הם שלמים חיוביים, ולכן $\alpha-\beta_0\in R^+$. ■

מסקנה 1.7 באינדוקציה על **הגובה** של $\alpha\in R^+$ ־ הגובה הוא

$$\alpha=\sum_{\beta\in\Delta}a_\beta\beta$$
$$ht(\alpha)=\sum_{\beta\in\Delta}a_\beta$$

אפשר להציג

$$\alpha=\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}$$

כסכום של שורשים פשוטים, כך שלכל $1\leq m\leq k$ מתקיים

$$\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_m}\in R$$

השייכות האחרונה כמובן מיד אומרת שייכות גם אל R^+.

טענה 1.8 יהי $\alpha \in \Delta$. אזי

$$s_\alpha\left(R^+ \backslash \{\alpha\}\right) = R^+ \backslash \{\alpha\}$$

הוכחה: יהי $\alpha \neq \gamma \in R^+$. נכתוב

$$\gamma = \sum_{\beta \in \Delta} a_\beta \beta$$

כאשר $a_\beta \geq 0$ שלמים. יש $\beta_0 \neq \alpha$ עבורו $a_{\beta_0} \geq 1$, ואז

$$s_\alpha(\gamma) = \gamma - \frac{2(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in R$$

באיבר הזה המקדם a_{β_0} נשאר ללא שינוי, כלומר הוא עדיין חיובי ־ כלומר $s_\alpha(\gamma) \in R^+$. כמובן $s_\alpha(\gamma) \neq \alpha$, כי $s_\alpha(-\alpha) = \alpha$ והשיקוף חד־חד־ערכי (וכמובן $\gamma \neq -\alpha$). לכן

$$s_\alpha(\gamma) \in R^+ \backslash \{\alpha\}$$

■

קבוצת האיברים הרגולריים

$$E \backslash \bigcup_{\alpha \in R} P_\alpha$$

היא פתוחה בתוך E. נכתוב אותה כאיחוד של המרכיבים הקשירים. המרכיבים הללו נקראים **חדרי וייל (Weyl Chambers)**. **החדר היסודי** (ביחס לבסיס Δ) הוא

$$C(\Delta) = \{v \in E \mid (v,\alpha) > 0 \forall \alpha \in \Delta\}$$

לכל $w \in W$ מתקיים

$$w(P_\alpha) = P_{w(\alpha)}$$

כאשר $w(\alpha) \in R$ כמובן. מכאן, W פועלת על $E \backslash \bigcup P_\alpha$ ולכן מעבירה מרכיב קשיר למרכיב קשיר.

משפט 1.9 (ללא הוכחה)

1. יהי γ רגולרי. אזי יש $w \in W$ שעבורו $(w(\gamma),\alpha) > 0$ לכל $\alpha \in \Delta$, כלומר $w(\gamma) \in C(\Delta)$.
2. חבורת וייל W פועלת טרנזיטיבית על חדרי וייל.
3. חבורת וייל פועלת טרנזיטיבית על קבוצת בסיסי R.
4. $W(\Delta) = R$, כלומר לכל $\alpha \in R$ יש $w \in W$ שעבורו $w(\alpha) \in \Delta$.
5. W נוצרת על ידי $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$.

הגדרה 1.10 נרשום $\Delta=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. **מטריצת קרטן** של המערכת היא המטריצה

$$\left(\frac{2\left(\alpha_i,\alpha_j\right)}{\left(\alpha_i,\alpha_i\right)}\right)_{i,j\leq n}$$

אין תלות בבחירת הבסיס Δ, כי אם ניקח בסיס אחר $\Delta'=\{\alpha_1',\ldots,\alpha_n'\}$, סעיף 3 במשפט הקודם אומר שיש $w\in W$ עבורו $w\left(\alpha_i\right)=\alpha_i'$, ואז

$$\frac{2\left(\alpha_i',\alpha_j'\right)}{\left(\alpha_i',\alpha_i'\right)}=\frac{2\left(w\left(\alpha_i\right),w\left(\alpha_j\right)\right)}{\left(w\left(\alpha_i\right),w\left(\alpha_i\right)\right)}=\frac{2\left(\alpha_i,\alpha_j\right)}{\left(\alpha_i,\alpha_i\right)}$$

בהינתן מטריצת קרטן של המערכת R אפשר לשחזר את כל איברי R בעזרת אלגוריתם סגור ומסודר (שלא נכתוב כאן).

דוגמה מטריצת קרטן של מערכת שורשים G_2 היא

$$\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$$

נסמן $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2\}$. אלה השורשים מגובה 1. מגובה 2: אנחנו יודעים כי

$$\frac{2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\left(\alpha_1,\alpha_1\right)}=-1$$

המספר הזה שווה $r-q$ עבור שרשרת השורשים α_1 דרך α_2. $r=0$ בהכרח, כי אלה איברי בסיס, ולכן $q=1$. לכן בהכרח $\alpha_2+\alpha_1\in R$. יש לנו גם שרשרת α_2 דרך α_1, שעבורה $\frac{2(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=-3=-q=r-q$, כלומר $q=3$, כלומר

$$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_2\in R$$

מצאנו עד עכשיו חמישה שורשים חיוביים. מגובה 2 כמובן שיש רק את $\alpha_1+\alpha_2$. אם α שורש מגובה 3 אזי $\alpha-\alpha_1$ שורש מגובה 2 או $\alpha-\alpha_2$ שורש מגובה 2. כלומר $\alpha=2\alpha_1+\alpha_2$ או $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2$. אנחנו יודעים שבהכרח מדובר במקרה השני כי רשמנו את שתי השרשראות, והראשון לא ייתכן. לכן יש רק שורש אחד מגובה 3. באותה צורה אם α מגובה 4 אז $\alpha=\alpha_1+3\alpha_2$. נרצה לדעת האם יש שורש מגובה 5: או $\alpha-\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2$ או $\alpha-\alpha_2=\alpha_1+3\alpha_2$. המקרה השני לא ייתכן שוב בגלל השרשראות שראינו. המקרה הראשון ייתן לנו $\alpha=2\alpha_1+3\alpha_2$, אבל לא ברור שזה שורש. כדי לוודא שזה שורש, כותבים

$$\alpha=\left(\alpha_1+3\alpha_2\right)+\alpha_1$$

כלומר נרצה את הסימן של $\left(\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_1\right)$. נחשב את הסימן (הזהה) של

$$\frac{2\left(\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_1\right)}{\left(\alpha_1,\alpha_1\right)}=\frac{2\left(\alpha_1,\alpha_1\right)}{\left(\alpha_1,\alpha_1\right)}+\frac{6\left(\alpha_2,\alpha_1\right)}{\left(\alpha_1,\alpha_1\right)}=2-3=-1<0$$

כלומר הסכום α אכן שורש. גובה 6: אפשריים רק

$$3\alpha_1+3\alpha_2=3\left(\alpha_1+\alpha_2\right)$$

זו כפולה של שורש ולכן לא שורש, או

$$2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2\left(\alpha_1 + 2\alpha_2\right)$$

וגם זו כפולה של שורש ולכן לא שורש. אם כן,

$$\begin{aligned} R^+ &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\} \\ R^- &= -R^+ \end{aligned}$$

בצורה דומה אפשר מכל מטריצת קרטן לחשב את כל מערכת השורשים.

נחזור כעת לאלגבראות לי פשוטות למחצה. נניח כי L אלגברת לי פשוטה למחצה, $H \subset L$ תת אלגברת קרטן מתפצלת ביחס לשדה, $R = R\left(L, H\right)$ מערכת השורשים, ונבחר בסיס $\Delta \subset R$ של מערכת השורשים, שנסמן אותו

$$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

ניזכר שלכל שורש יש לנו האיברים $x_{\alpha_i}, h_{\alpha_i}, x_{-\alpha_i}$ - הקבוצה

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x_{\alpha_i}, h_{\alpha_i}, x_{-\alpha_i}\}$$

זו קבוצה של $3n$ איברים שיוצרת את L כאלגברת לי. נזכור שכמובן אפשר לכתוב

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} L^\alpha\right)$$

ראינו שאם $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$ אזי

$$\left[L^\alpha, L^\beta\right] = L^{\alpha+\beta}$$

יהיו $\alpha \in R^+$. נכתוב

$$\alpha = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}$$

כך שלכל $1 \leq m \leq k$ מתקיים

$$\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_m} \in R^+$$

אזי

$$\begin{aligned} \left[L^{\alpha_{i_1}}, L^{\alpha_{i_2}}\right] &= L^{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}} = F\left[x_{\alpha_{i_1}}, x_{\alpha_{i_2}}\right] \\ \left[L^{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}}, L^{\alpha_{i_3}}\right] &= L^{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3}} = F\left[\left[x_{\alpha_{i_1}}, x_{\alpha_{i_2}}\right], x_{\alpha_{i_3}}\right] \\ &\vdots \\ L^\alpha &= F\left[\ldots\left[\left[x_{\alpha_{i_1}}, x_{\alpha_{i_2}}\right], x_{\alpha_{i_3}}\right], \ldots, x_{\alpha_{i_k}}\right] \end{aligned}$$

ובאופן דומה עושים עבור $L^{-\alpha}$. מקבלים גם בסיס לינארי של L מעל F - כל $\alpha \in R^+$ תורם את האיבר

$$\left[\ldots\left[\left[x_{\alpha_{i_1}}, x_{\alpha_{i_2}}\right], x_{\alpha_{i_3}}\right], \ldots, x_{\alpha_{i_k}}\right]$$

וכל איבר $\alpha \in R^-$ תורם בהתאמה את האיבר

$$\left[\ldots\left[\left[x_{-\alpha_{i_1}}, x_{-\alpha_{i_2}}\right], x_{-\alpha_{i_3}}\right], \ldots, x_{-\alpha_{i_k}}\right]$$

יחד עם האיברים h_α נקבל שהקבוצה שלנו אכן יוצרת את L (ואפילו מצאנו בסיס). מוכיחים כי בעזרת מטריצת קרטן של מערכת השורשים R אפשר לכתוב את טבלת הכפל (קומוטטור) של כל שני איברים בבסיס הזה.

דוגמה בדוגמה שראינו מתוך G_2, נחשב

$$[x_{-\alpha_1}, [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}]] = [[x_{-\alpha_1}, x_{\alpha_1}], x_{\alpha_2}] + \left[x_{\alpha_1}, \underbrace{[x_{-\alpha_1}, x_{\alpha_2}]}_{\in L^{\alpha_2-\alpha_1}, \alpha_2-\alpha_1 \notin R \Rightarrow =0}\right] = -[h_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}] = -\alpha_2(h_{\alpha_1})\, x_{\alpha_2} =$$
$$= -\frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)} x_{\alpha_2} = x_{\alpha_2}$$

כמסקנה מקבלים:

מסקנה 1.11 תהינה L, L' שתי אלגבראות לי פשוטות למחצה עם תת אלגבראות קרטן $H \subset L, H' \subset L'$ שמתפצלות מעל F. נניח כי למערכות השורשים $R = R(L, H)$, $R' = R(L', H')$ יש אותה מטריצת קרטן. אזי $L \cong L'$, ואפשר לבחור את האיזומורפיזם כך שאם

$$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$
$$\Delta' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$$

אזי לכל שורש $\alpha \in R^+$ נתאים, לפי הייצוג כסכום שראינו למעלה,

$$\left[\ldots\left[\left[x_{\alpha_{i_1}}, x_{\alpha_{i_2}}\right], x_{\alpha_{i_3}}\right], \ldots, x_{\alpha_{i_k}}\right] \mapsto \left[\ldots\left[\left[x_{\alpha'_{i_1}}, x_{\alpha'_{i_2}}\right], x_{\alpha'_{i_3}}\right], \ldots, x_{\alpha'_{i_k}}\right]$$

באותה צורה עבור $\alpha \in R^-$, ולכן

$$h_{\alpha_i} \mapsto h_{\alpha'_i}$$

נמשיך. יש לנו בסיס Δ למערכת שורשים $R = R(L, H)$. נאמר כי Δ מתפרק אם אפשר להציג $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ לא ריקות כאשר $\Delta_1 \perp \Delta_2$. אחרת Δ לא מתפרק.

משפט 1.12 Δ לא מתפרק אם ורק אם L אלגברת לי פשוטה.

הוכחה: נראה כיוון אחד, השני יישאר כתרגיל. נניח כי L פשוטה, ונראה כי Δ לא מתפרק. בשלילה, נניח שהוא כן, כלומר נכתוב $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ עם $\Delta_1 \perp \Delta_2$. נסמן R_1 את כל איברי R שהם צירופים לינאריים של איברי Δ_1. נגדיר

$$L_1 = H_1 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R_1} L^{\alpha} \right)$$

כאשר $H_1 = \operatorname{Span}\left(\{h_\alpha \mid \alpha \in \Delta_1\}\right)$. זאת תת אלגברת לי. למעשה, $L_1 \subset L$ אידאל, כי יהי $\alpha \in \Delta_2$, לכל $\beta \in R_1^+$ $\beta - \alpha \notin R$ ולכן

$$\left[L^{\alpha}, L^{-\beta}\right] = 0$$

גם $\left[L^{\alpha}, L^{\beta}\right] = 0$, כי נסתכל בשרשרת α דרך β - בהכרח $r = 0$ ואז

$$-q = \frac{2\left(\beta, \alpha\right)}{\left(\alpha, \alpha\right)} = 0$$

כלומר $\alpha + \beta$ גם כן לא שורש. אם כן, קיבלנו סתירה לפשטות של L, כי מצאנו אידאל לא טריוויאלי. כאמור, הכיוון השני - תרגיל. ■

מסקנה 1.13 האלגבראות $\sigma_{2n}F$, $\mathrm{sp}_{2n}F$, sl_nF, $\mathrm{o}_{2n+1}F$ הן פשוטות.

הוכחה:

1. הן פשוטות למחצה (מחשבים תבנית קילינג ורואים שהיא לא מנוונת).
2. מגדירים H שהיא המטריצות האלכסוניות מכל אלגברה. זו תת אלגברת קרטן.
3. מוצאים את $R = R\left(L, H\right)$, מוצאים איזשהו בסיס Δ ובודקים שהוא בלתי מתפרק.

■

הגדרה 1.14 **דיאגרמת דינקין** של R. נבחר בסיס

$$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

דיאגרמת דינקין היא גרף, שקודקודיו הם איברי Δ. מקשרים את α_i ואת α_j (כאשר $i \neq j$) במספר צלעות השווה

$$\frac{2\left(\alpha_i, \alpha_j\right)}{\left(\alpha_i, \alpha_i\right)} \cdot \frac{2\left(\alpha_i, \alpha_j\right)}{\left(\alpha_j, \alpha_j\right)} \in \{0, 1, 2, 3\}$$

אם מספר זה הוא 2 או 3, אז $||\alpha_i|| \neq ||\alpha_j||$, ומוסיפים חץ שמצביע על השורש הקצר מבין α_i, α_j.

קל לראות כי Δ בלתי מתפרקת אם ורק אם דיאגרמת דינקין קשירה. נותר עניין קומבינטורי, למיין את דיאגרימות דינקין הקשירות.

1. A_n, שהוא גרף קו (כל קודקוד מחובר לבא אחריו) - זה ממומש בתור sl_nF.

2. B_n, שהוא גרף קו גם כן, אבל בין $n-1$ אל n יש 2 קשתות וחץ אל n ־ זה ממומש בתור $\sigma_{2n+1}F$

3. C_n, שדואלי אל B_n, זהה לחלוטין רק שהחץ הוא לכיוון $n-1$ ־ זה ממומש בתור $\mathrm{sp}_{2n}F$.

4. D_n, גרף קו עד $n-2$, שממנו קשת אחת אל $n-1$ ואחת אל n ־ זה ממומש בתור $\sigma_{2n}F$.

5. (מעתה והלאה מדובר ביוצאים מן הכלל) G_2, שלוש קשתות בין שני קודקודים וחץ אל 1.

6. F_4, גרף קו עם 4 קודקודים שבין $2,3$ יש שתי קשתות עם חץ לכיוון 3.

7. E_6, גרף קו שבו מדלגים על 2 ־ 1, 3, 4, 5, 6, וכן קשת בין 2 לבין 4.

8. E_7, שזהה לקודם עם התוספת של קודקוד שביעי וקשת בין 6 לבין 7.

9. E_8, שזהה לקודם עם התוספת של קודקוד שמיני וקשת בין 7 לבין 8.

יש עוד תורה יפה מאוד של הצגות של אלגבראות לי פשוטות למחצה. יש גם קשרים מאוד יפים לחבורות האלגבריות ולחבורות לי המתאימות.