אלגבראות לי

© ארזים

3 ביוני 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 מערכת השורשים באלגברת לי פשוטה למחצה ביחס לתת אלגברת קרטן מתפצלת מעל השדה

היינו באמצע הוכחת משפט. נחזור אליה: **הוכחה:** את סעיף 3 המרצה מחשיב כגמור מהשיעור הקודם (נשארו כמה דברים קלים להראות). נראה את סעיף 4.

יהי $x \in L$ איבר פשוט למחצה. תת האלגברה $Fx \subset L$ היא קומוטטיבית, ואיבריה פשוטים למחצה, ולכן $Fx \in \mathcal{E}$, מהסעיף הקודם. לכן יש איבר $H \in \mathcal{E}$ מקסימלי שמכיל את Fx, וראינו כי H אלגברת קרטן. בנוסף, ראינו כי $L^0\left(x\right) = c_L\left(x\right)$, ולכן ברור כי x גנרי אם ורק אם $\dim c_L\left(x\right) = \operatorname{rank}\left(L\right)$. ■

משפט 1.1 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה מעל F. תהי $H \subset F$ תת אלגברת קרטן שמתפצלת מעל F. נסמן $R = R\left(L,H\right)$. נסמן את פירוק קרטן:

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} L^\alpha$$

1. לכל $\alpha, \beta \in R$, ניזכר באיבר h_α - הוא מקיים $\left[L^\alpha, L^{-\alpha}\right] = Fh_\alpha$ וכן $\alpha\left(h_\alpha\right) = 2$. אזי $a_{\beta,\alpha} = \beta\left(h_\alpha\right) \in \mathbb{Z}$.
2. לכל $\alpha, \beta \in R$ הקבוצה $\left\{m \in \mathbb{Z} \mid \beta + m\alpha \in R \cup \{0\}\right\}$ היא רווח רצוף של מספרים שלמים, כלומר
$$\left[-r, q\right]_{\mathbb{Z}} = \left\{-r, -r+1, \ldots, q-1, q\right\}$$
כאשר $r, q \geq 0$. מתקיים $a_{\beta,\alpha} = r - q$.
3. יהי $\alpha \in R$. אזי השורשים (איברי R) היחידים שפרופורציונים לאותו α הם $\pm\alpha$.
4. לכל $\alpha, \beta \in R$ מתקיים $\beta - a_{\beta,\alpha} \cdot \alpha \in R$.
5. יהיו $\alpha, \beta \in R$ ונניח כי $\beta - \alpha \notin R \cup \{0\}$. אזי $a_{\beta,\alpha} \leq 0$, $r = 0$, $a_{\beta,\alpha} = -q$.
6. יהיו $\alpha, \beta \in R$. נניח כי $\beta + \alpha \in R$. אזי $\left[L^\alpha, L^\beta\right] = L^{\alpha+\beta}$.

הוכחה:

1. נגדיר

$$J_{\beta,\alpha} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} L^{\beta+m\alpha}$$

אזי זהו מרחב אינווריאנטי להצגה $\sigma(x) = \mathrm{ad}_L x$ של תת אלגברת לי $S_\alpha = L^\alpha \oplus Fh_\alpha \oplus L^{-\alpha} = Fx_\alpha \oplus Fh_\alpha \oplus Fx_{-\alpha}$. יש לנו גם האיזומורפיזם $\varphi_\alpha : \mathrm{sl}_2 F \to S_\alpha$, כך שנקבל כי $\sigma \circ \varphi_\alpha$ היא הצגה של $\mathrm{sl}_2 F$. נכתוב את הפירוק:

$$\sigma \circ \varphi_\alpha \cong \rho_{r_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{r_k}$$

כאשר $r_1 \leq \cdots \leq r_k$. פעולת $\sigma\varphi_\alpha(h) = \sigma(h_\alpha)$ בתוך $J_{\beta,\alpha}$ היא אלכסונית על $L^{\beta+m\alpha}$. הפעולה היא על ידי כפל פי

$$(\beta + m\alpha)(h_\alpha) = \beta(h_\alpha) + 2m$$

הערכים העצמיים של $\varphi_{r_i}(h)$ הם מספרים שלמים: $r_i, r_i - 2, \ldots, -r_i$. בפרט, $\beta(h_\alpha) + 2m$ שלמים כולם, ולכן $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.

2. כיוון שכל r_i הוא אחד הערכים העצמיים של $\sigma \circ \varphi_\alpha(h)$, יש שלם $m = n_i$ שעבורו $r_i = \beta(h_\alpha) + 2n_i$. בפרט, נקבל כי

$$r_i \equiv a_{\beta,\alpha} \pmod 2$$

לכל i. מכאן, קבוצת הערכים העצמיים של $\alpha \circ \varphi(h)$ (לא כולל ריבוי) שווה לקבוצת הערכים העצמיים של $\rho_{r_k}(h)$, שהם מהצורה $r_k - 2l$, כאשר $0 \leq l \leq r_k$. לכן, לכל l כזה, יש $m_l \in \mathbb{Z}$ שעבורו

$$a_{\beta,\alpha} + 2m_l = r_k - 2l = \beta(h_\alpha) + 2n_k - 2l$$

לכן נקבל כי

$$m_l = n_k - l$$

כלומר נקבל כי

$$m = n_k, n_k - 1, \ldots, n_k - r_k$$

כלומר נקבל כי

$$\{m \in \mathbb{Z} \mid \beta + m\alpha \in R \cup \{0\}\} = [n_k - r_k, n_k]_{\mathbb{Z}}$$

ברור כי $0 \in [n_k - r_k, n_k]_{\mathbb{Z}}$. אם כן, נסמן

$$-r \coloneqq n_k - r_k \leq 0 \leq n_k \eqqcolon q$$

כלומר נקבל

$$q + r = n_k + r = r_k = a_{\beta,\alpha} + 2n_k = a_{\beta,\alpha} + 2q$$

כלומר

$$q + r = a_{\beta,\alpha} + 2q$$
$$a_{\beta,\alpha} = r - q$$

3. יהי $\alpha\in R$. נניח כי $\beta\in R$ שעבורו $\beta=t\alpha$, כאשר $t\in F$. אזי

$$\mathbb{Z}\in\beta\left(h_{\alpha}\right)=\beta\left(h_{\alpha}\right)=t\alpha\left(h_{\alpha}\right)=2t$$

לכן בצורה קלה גם $2t^{-1}\in\mathbb{Z}$, והרי

$$\left(2t\right)\left(2t^{-1}\right)=4$$

נסיק כי

$$2t\in\left\{ \pm1,\pm2,\pm4\right\}$$

כלומר

$$t\in\left\{ \pm\frac{1}{2},\pm1,\pm2\right\}$$

מטרתנו כעת לפסול את המקרה הראשון והאחרון, כלומר להראות כי בהכרח $t=\pm1$. כיוון שמתקיים $-R=R$, די לפסול את $2,\frac{1}{2}$. אם נראה כי $t\neq2$, אזי $t^{-1}\neq2$ גם מסימטריה, ואז זה יפסול את $t=\frac{1}{2}$. כלומר, נותר לנו למעשה להראות שלכל $\alpha\in R$, $2\alpha\notin R$. נניח בשלילה שקיים $\alpha\in R$ שעבורו $\beta=2\alpha\in R$. נחזור שוב למרחב

$$J=\sum_{m=-r}^{q}L^{\beta+m\alpha}=\sum_{m=-r}^{q}L^{(m+2)\alpha}$$

לפי מה שראינו קודם, m שתורם לסכום $J_{\beta,\alpha}$ הוא כזה שמקיים

$$m+2\in\left\{ 0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm2\right\}$$

m שלם, ולכן נוכל לפסול את $\pm\frac{1}{2}$ - ונקבל

$$J_{\beta,\alpha}=L^{-2\alpha}+L^{-\alpha}+H+L^{\alpha}+L^{2\alpha}$$

נתבונן שוב בהצגה $\sigma\circ\varphi_{\alpha}$הערכים העצמיים השונים מאפס של $\sigma\circ\varphi_{\alpha}\left(h\right)=\sigma\left(h_{\alpha}\right)$ הם $\left\{ \pm\alpha\left(h_{\alpha}\right),\pm2\alpha\left(h_{\alpha}\right)\right\} =\left\{ \pm2,\pm4\right\}$, וכל אחד מהם מופיע בריבוי אחד. מכאן רואים כי

$$\sigma\circ\varphi_{\alpha}=l\rho_{0}+\rho_{4}$$

כאשר $\dim H=l+1$. כזכור, למרחב ההצגה של ρ_{4}, שנסמנו $V_{\rho_{4}}$, יש בסיס $\left\{ v_{0},v_{1},v_{2},v_{3},v_{4}\right\}$ של וקטורים עצמיים של פעולת h, כמו שרשמנו בכיתה בעבר. בפרט ניזכר כי

$$\begin{aligned}\rho_{4}\left(h\right)v_{0} & =4v_{0}\\
\rho_{4}\left(e\right)v_{1} & =4v_{0}\\
\rho_{4}\left(h\right)v_{1} & =2v_{1}
\end{aligned}$$

לכן $v_1 \in L^\alpha = Fx_\alpha$, ואז

$$\sigma(x_\alpha)v_1 = \sigma \circ \varphi_\alpha(e)v_1 = 4v_0$$
$$\sigma \circ \varphi_\alpha(h)v_1 = 2v_1$$

כלומר

$$\sigma(x_\alpha)v_1 = [x_\alpha, v_1] = 0$$

כלומר $4v_0 = 0$, בסתירה.

4. אם נתבונן במרווח השורשים שלנו (שנקרא גם שרשרת α של שורשים דרך β), אזי נשים לב כי

$$-r \leq q - r \leq q$$

ולכן כמובן $q - r \in [-r, q]_{\mathbb{Z}}$, כלומר $\beta + (q-r)\alpha \in R \cup \{0\}$. כל שנותר להראות הוא שזה לא 0. אם הוא כן 0, נקבל כי β הוא כפולה של α, כלומר בהכרח $a_{\beta,\alpha} = \pm 1$, $\beta = \pm\alpha$. מכאן נקבל כי

$$a_{\beta,\alpha} = \beta(h_\alpha) = \pm\alpha(h_\alpha) = \pm 2$$

וזו כמובן סתירה.

5. נניח כי $\alpha \neq \beta$ וכן כי $\beta - \alpha \notin R$. נובע כי $-1 \notin [-r, q]$, אבל ראינו כי $0 \in [-r, q]$, ולכן בבירור $r = 0$. אם כן,

$$a_{\beta,\alpha} = r - q = -q \leq 0$$

6. נניח כי $\beta + \alpha \in R$. מכאן נובע כי $\beta \neq -\alpha$ שכן $0 \notin R$. כמו כן, נובע כי $\alpha \neq \beta$, כי $2\alpha \notin R$. לכן, אם נתבונן בסכום

$$J_{\beta,\alpha} = \sum_{m=-r}^{q} L^{\beta+m\alpha}$$

לא מופיע המחובר $L^0 = H$. כמו קודם, הערכים העצמיים של $\sigma \circ \varphi_\alpha(h)$ במרחב $J_{\beta,\alpha}$ הם $a_{\beta,\alpha} + 2m$, כל אחד בריבוי 1. נכתוב

$$\sigma \circ \varphi_\alpha = \rho_{r_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{r_k}$$

כאשר $r_1 \leq \cdots \leq r_k$. ראינו כי $r_i \equiv a_{\beta,\alpha} \pmod 2$, ואז כל הערכים העצמיים של $\rho_{r_1}(h)$ מופיע בסכום בריבוי k. נסיק כי $k = 1$, וכן כי $\sigma \circ \varphi_\alpha$ אי־פריקה. נשתמש שוב בבסיס $\{v_0, \ldots, v_{r_1}\}$ של הווקטורים העצמיים של $\rho_{r_1}(h)$, כאשר

$$\rho_{r_1}(h)(v_i) = (r_1 - 2i)v_i$$

כזכור, לאופרטור $\rho_{r_1}(e)$ יש ערך עצמי, והוא 0, ולכן ווקטור עצמי יחיד (עד כדי כפל בסקלר) ־ v_0. כמו כן, v_0 הוא ווקטור עצמי של $\rho_{r_1}(h)$ עם ערך עצמי r_1, וזהו

הערך העצמי הגדול ביותר של $\rho_{r_1}(h)$. מהצד השני, הערך העצמי הגדול ביותר של $\sigma\circ\varphi_\alpha(h)=\sigma(h_\alpha)$ הוא $(\beta+q\alpha)(h_\alpha)=a_{\beta,\alpha}+2q$, ולכן

$$a_{\beta,\alpha}+2q=r_1$$

וכן $L^{\beta+q\alpha}$ הוא המרחב העצמי של $\sigma(h_\alpha)$ ביחס לערך העצמי r_1, ולכן זהו המרחב העצמי היחיד לפעולת $\sigma\circ\varphi_\alpha(e)=\sigma(x_\alpha)$, עם ערך עצמי 0. מכאן נקבל כי

$$\sigma\circ\varphi_\alpha(e)\left(L^\beta\right)=\sigma(x_\alpha)\left(L^\beta\right)=\left[x_\alpha,L^\beta\right]\neq 0$$

כי אחרת גם L^β מרחב עצמי (ביחס לערך העצמי 0) של $\sigma\circ\varphi_\alpha(e)$ ואז $L^\beta=L^{\beta+q\alpha}$, ומכאן $\beta=\beta+q\alpha$, כלומר $q=0$, אבל $q\geq 1$ כי $\beta+\alpha\in R$. זה מראה כי $\left[L^\alpha,L^\beta\right]\neq 0$. ההכלה $\left[L^\alpha,L^\beta\right]\subset L^{\alpha+\beta}$ תמיד נכונה, והרי $\alpha+\beta\in R$ ולכן $\dim\left(L^{\alpha+\beta}\right)=1$, כלומר $\left[L^\alpha,L^\beta\right]=L^{\alpha+\beta}$ כמו שרצינו.

■

ניזכר בסימון מהפעם הקודמת - עבור $\lambda\in H^*$, סימנו $\widetilde{h}_\lambda\in H$ את האיבר היחיד שלכל $h\in H$ מקיים

$$\lambda(h)=\kappa\left(h,\widetilde{h}_\lambda\right)$$

ראינו כי

$$h_\alpha=\frac{2\widetilde{h}_\alpha}{\kappa\left(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\alpha\right)}$$

נסמן מחדש כך:

1. לכל $x,y\in L$ נסמן

$$(x,y)=\kappa(x,y)$$

2. לכל $\lambda,\mu\in H^*$ נגדיר

$$(\lambda,\mu)=\left(\widetilde{h}_\lambda,\widetilde{h}_\mu\right)=\kappa\left(\widetilde{h}_\lambda,\widetilde{h}_\mu\right)=\lambda\left(\widetilde{h}_\mu\right)=\mu\left(\widetilde{h}_\lambda\right)$$

זה כמובן מגדיר תבנית בילינארית סימטרית ולא מנוונת על H^*. לפי הסימון הזה, לכל שורש $\alpha\in R$, מתקיים

$$h_\alpha=\frac{2\widetilde{h}_\alpha}{\left(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\alpha\right)}$$

נחשב אם כן:

$$(h_\alpha,h_\alpha)=\frac{4}{\left(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\alpha\right)^2}\left(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\alpha\right)=\frac{4}{\left(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\alpha\right)}$$

ולבסוף

$$\frac{2h_\alpha}{(h_\alpha,h_\alpha)}=\frac{\frac{4\widetilde{h}_\alpha}{(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\alpha)}}{\frac{4}{(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\alpha)}}=\widetilde{h}_\alpha$$

טענה 1.2 יהיו $\alpha,\beta\in R$. אזי

$$a_{\beta,\alpha}=\frac{2\left(\beta,\alpha\right)}{\left(\alpha,\alpha\right)}=\frac{2\left(h_\alpha,h_\beta\right)}{\left(h_\beta,h_\beta\right)}\in\mathbb{Z}$$

הוכחה:

$$a_{\beta,\alpha}=\beta\left(h_\alpha\right)=\kappa\left(h_\alpha,\widetilde{h}_\beta\right)=\left(h_\alpha,\widetilde{h}_\beta\right)$$

מכאן אפשר להציב בשתי צורות:

$$\begin{aligned}\left(h_\alpha,\widetilde{h}_\beta\right)&=\frac{2\left(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\beta\right)}{\left(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\alpha\right)}=\frac{2\left(\beta,\alpha\right)}{\left(\alpha,\alpha\right)}\\\left(h_\alpha,\widetilde{h}_\beta\right)&=\frac{2\left(h_\alpha,h_\beta\right)}{\left(h_\beta,h_\beta\right)}\end{aligned}$$

בכל פעם הצבנו באחד הצדדים את הנוסחה שהראינו בשבילו. ■

הגדרה 1.3 אוסף השלמים $a_{\beta,\alpha}$, עבור $\beta,\alpha\in R$, נקראים **השלמים של קרטן** שמתאימים מערכת השורשים של L ביחס לתת האלגברה H - $R\left(L,H\right)$.

יהי $\alpha\in R$. נגדיר העתקה לינארית

$$\begin{aligned}s_\alpha&:H^*\to H^*\\s_\alpha\left(\mu\right)&=\mu-\frac{2\left(\mu,\alpha\right)}{\left(\alpha,\alpha\right)}\alpha\end{aligned}$$

טענה 1.4 יהי $\alpha\in R$, אזי s_α שייכת לחבורה האורתוגונלית ביחס לתבנית $(\cdot,\cdot)$. יתר על כן, כשנפרק

$$H^*=F\alpha\oplus\alpha^\perp$$

אזי $s_\alpha\mid_{\alpha^\perp}=\mathrm{Id}$, וכן $s_\alpha\left(\alpha\right)=-\alpha$ (כלומר זו העתקת שיקוף ביחס לאותו α).

הוכחה:

$$\left(s_\alpha(\mu), s_\alpha(\eta)\right) = \left(\mu - \frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha, \eta - \frac{2(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\right) =$$
$$= (\mu,\eta) - \frac{2(\eta,\alpha)(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} - \frac{2(\mu,\alpha)(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} + \frac{4(\mu,\alpha)(\eta,\alpha)(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)^2} =$$
$$= (\mu,\eta)$$

כלומר ההעתקה שלנו אכן אורתוגונלית. כעת, אם $(\mu,\alpha)=0$ אזי $s_\alpha(\mu)=\mu$ לפי הגדרה, וכן

$$s_\alpha(\alpha) = \alpha - \frac{2(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha$$

■

הגדרה 1.5 לכל $\alpha \in R$ מתקיים

$$s_\alpha(R) = R$$

הוכחה: יהי $\beta \in R$. אזי

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = \beta - a_{\beta,\alpha}\alpha \in R$$

מהמשפט הקודם. השיקוף שלנו כמובן חד־חד־ערכי ועל מסדר 2, ולכן זה מספיק, כי R סופית. ■

הגדרה 1.6 תהי $W = W(L,H)$ חבורת האוטומורפיזמים של H^* הנוצרת על ידי כל השיקופים $\{s_\alpha \mid \alpha \in R\}$. חבורה זו תיקרא **חבורת וייל (Weyl)** של L ביחס לתת האלגברה H.

חבורת וייל היא סופית, כי ההעתקה

$$W \ni w \mapsto w\mid_R$$

היא חד־חד־ערכית, כי R פורשת את H^*. לכן יש שיכון של W בחבורת התמורות של הקבוצה הסופית R (S_R) - כלומר W סופית. נשים לב כמובן שלכל $w \in W$ מתקיים $w(R)=R$ כי לכל $\alpha \in R$ מתקיים $s_\alpha(R)=R$, ולכן אנחנו יודעים כי $w\mid_R \in S_R$.

נבחר כעת $R \supset \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ בסיס של H^* מעל F (כמובן $n = \dim_F H^* = \mathrm{rank}(L)$).

טענה 1.7 לכל $\alpha \in R$ מתקיים

$$\alpha \in \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$$

הוכחה: נכתוב

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$$

כאשר $c_i\in F$. לכל $1\leq j\leq n$ מתקיים

$$\frac{2\left(\alpha,\alpha_j\right)}{\left(\alpha_j,\alpha_j\right)}=\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{2\left(\alpha_i,\alpha_j\right)}{\left(\alpha_j,\alpha_j\right)}$$

וכך נקבל מערת משוואות בנעלמית $c_1,\ldots,c_n$ כשכל המקדמים שלמים (הם כולם שלמים של קרטן). למערכת הזאת יש פתרון יחיד, כי המטריצה $\left(\left(\alpha_i,\alpha_j\right)\right)_{i,j\leq n}$ הפיכה (וזאת המטריצה של המערכת, עד כדי כפל במטריצה אלכסונית). על כן נקבל שהפתרון היחיד הוא עם קואורדינטיות רציונליות (מכלל קרמר, כי כל המקדמים שלמים). ■

נגדיר

$$E_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\left\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right\}$$

טענה 1.8 צמצום התבנית $(\cdot,\cdot)$ למרחב $E_{\mathbb{Q}}$ מקבל ערכים רציונליים. התבנית על $E_{\mathbb{Q}}$ אינה מנוונת, ויתר על כן היא חיובית לחלוטין ־ כלומר $(\lambda,\lambda)>0$ לכל $\lambda\neq0$.

הוכחה: די להראות כי $\left(\alpha_i,\alpha_j\right)\in\mathbb{Q}$. מתקיים

$$\frac{2\left(\alpha_i,\alpha_j\right)}{\left(\alpha_j,\alpha_j\right)}\in\mathbb{Z}$$

כלומר

$$\left(\alpha_i,\alpha_j\right)\in\frac{\left(\alpha_j,\alpha_j\right)}{2}\mathbb{Z}$$

כלומר מספיק להראות כי $\left(\alpha_j,\alpha_j\right)\in\mathbb{Q}$. נראה כעת כי $(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Q}$ לכל $\alpha\in R$. מתקיים

$$\begin{aligned}(\alpha,\alpha)=\kappa\left(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\alpha\right)&=\sum_{\beta\in R}\beta\left(\widetilde{h}_\alpha\right)\beta\left(\widetilde{h}_\alpha\right)=\\&=\sum_{\beta\in R}\left(\beta\left(\widetilde{h}_\alpha\right)\right)^2=\sum_{\beta\in R}\left(\kappa\left(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\beta\right)\right)^2=\\&=\sum_{\beta\in R}(\alpha,\beta)^2\end{aligned}$$

אם כן,

$$\frac{4}{(\alpha,\alpha)}=(\alpha,\alpha)\frac{4}{(\alpha,\alpha)^2}=\sum_{\beta\in R}\frac{4(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)^2}=\sum_{\beta\in R}\left(\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\right)^2$$

כאן יש לנו סכום של ריבועים של מספרים שלמים, כלומר הסכום כולו שלם - אם כן

$$\frac{4}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}^{+}$$

ולכן נקבל כי $(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Q}$. יהי $\lambda \in E_{\mathbb{Q}}$. נעשה את אותו פיתוח בדיוק ונקבל

$$(\lambda,\lambda) = \sum_{\beta\in R} (\lambda,\beta)^2$$

זה סכום של רציונאליים חיוביים, ולכן חיובי בעצמו. זה יתאפס אם ורק אם $(\lambda,\beta)=0$ לכל $\beta \in R$ - והרי R פורש את H^*, ולכן $\lambda = 0$. ■

לבסוף, נגדיר

$$E = E_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

הרחבת סקלרים, ונרחיב את התבנית $(\cdot,\cdot)$ למרחב E כרגיל. נקבל מכפלה פנימית על E. נמשיך לסמן את $\alpha \otimes 1$ בתור α לכל $\alpha \in R$, וכן נסמן את המכפלה הפנימית באותו סימון $(\cdot,\cdot)$.

$$\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}} = \dim H = \mathrm{Rank}\,(L)$$

נסכם במשפט הבא:

משפט 1.9 1. R היא תת קבוצה סופית של המרחב האוקלידי E; R פורשת את E וכן $0 \notin R$.

2. לכל $\alpha \in R$ גם $-\alpha \in R$, והכפולות היחידות של α שנמצאות בתוך R הן $\pm\alpha$.

3. לכל $\alpha \in R$, מתקיים

$$s_{\alpha}(R) = R$$

כאשר s_{α} מוגדר כמו קודם:

$$s_{\alpha} : E \to E$$
$$s_{\alpha}(v) = v - \frac{2(\alpha,v)}{||\alpha||^2}\alpha$$

4. לכל $\alpha,\beta \in R$ מתקיים

$$\frac{2(\beta,\alpha)}{||\alpha||^2} \in \mathbb{Z}$$

הגדרה 1.10 נתון מרחב מכפלה פנימית E מעל $\mathbb{R}$. קבוצה סופית $R \subset E$ תיקרא **מערכת שורשים (Root System)** אם היא מקיימת את ארבעת התנאים מהמשפט.

דוגמה ניקח $L=\mathrm{sl}_n F$,

$$H=\left\{\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$$

ראינו כי

$$R=\{\alpha_{i,j} \mid 1\le i\ne j\le n\}$$

כאשר

$$\alpha_{i,j}(h)=h_i-h_j$$

ראינו גם כי

$$h_{\alpha_{i,j}}=e_{i,i}-e_{j,j}$$

נרצה לחשב את $\widetilde{h}_\alpha$. מתקיים

$$h_i-h_j=\alpha_{i,j}(h)=\kappa\left(h,\widetilde{h}_\alpha\right)=2n\mathrm{tr}\left(h\cdot\widetilde{h}_{\alpha_{i,j}}\right)$$

אם כן נקבל כי

$$\widetilde{h}_{\alpha_{i,j}}=\frac{1}{2n}\left(e_{i,i}-e_{j,j}\right)=\frac{1}{2n}h_{\alpha_{i,j}}$$

עבור $r\ne s, i\ne j$ נקבל

$$\begin{aligned}
(\alpha_{r,s},\alpha_{i,j}) &= \kappa\left(\widetilde{h}_{\alpha_{r,s}},\widetilde{h}_{\alpha_{i,j}}\right)=\frac{1}{4n^2}2n\mathrm{tr}\left(\left(e_{r,r}-e_{s,s}\right)\left(e_{i,i}-e_{j,j}\right)\right)= \\
&= \frac{1}{2n}\mathrm{tr}\left(\delta_{i,r}e_{i,i}-\delta_{r,j}e_{j,j}-\delta_{s,i}e_{i,i}+\delta_{s,j}e_{j,j}\right)= \\
&= \frac{1}{2n}\left(\delta_{i,r}-\delta_{r,j}-\delta_{s,i}+\delta_{s,j}\right)= \\
&= \frac{1}{2n}\begin{cases} 0 & r,s\ne i,j \\ 1 & r=i,s\ne j \\ 2 & r=i,s=j \\ -1 & r=j,s\ne i \\ -2 & r=j,s=i \end{cases}
\end{aligned}$$

נתבונן בשיקוף

$$\begin{aligned}
s_{\alpha_{i,j}}\left(\alpha_{r,s}\right) &= \alpha_{r,s}-\frac{2\left(\alpha_{r,s},\alpha_{i,j}\right)}{\|\alpha_{i,j}\|^2}\alpha_{i,j}= \\
&= \alpha_{r,s}-2n\left(\alpha_{r,s},\alpha_{i,j}\right)\alpha_{i,j}= \\
&= \begin{cases} \alpha_{r,s} & r,s\ne i,j \\ \alpha_{i,s}-\alpha_{i,j}=\alpha_{j,s} & r=i,s\ne j \\ -\alpha_{i,j}=\alpha_{j,i} & r=i,s=j \\ \alpha_{j,s}+\alpha_{i,j}=\alpha_{i,s} & r=j,s\ne i \\ \alpha_{j,i}+2\alpha_{i,j}=\alpha_{i,j} & r=j,s=i \end{cases}
\end{aligned}$$

לפי חישוב זה רואים כי $s_{\alpha_{i,j}}$ פועל כמו תמורת החילוף (i,j) על $\{1,2,\ldots,n\}$. נקבל אם כן כי

$$W_{\mathrm{sl}_n F} \cong S_n$$

הגדרה 1.11 חבורת וייל של מערכת השורשים R היא החבורה הנוצרת על ידי כל השיקופים s_α. זאת חבורה סופית.

דוגמה ניתן דוגמה מהכיוון של מערכות שורשים. יהי

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^{l+1} x_i e_i \in \mathbb{R}^{l+1} \mid \sum_{i=1}^{l+1} x_i = 0 \right\}$$

נגדיר

$$R = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$$

זאת מערכת שורשים. נתבונן במנה:

$$\frac{2\left(e_i - e_j, e_r - e_s\right)}{\left|\left|e_i - e_j\right|\right|^2} = \left(e_i - e_j, e_r - e_s\right) \in \mathbb{Z}$$

זה חישוב פשוט. לבסוף, נתבונן בשיקוף:

$$s_{e_i - e_j}\left(e_r - e_s\right)$$

קל לבדוק בידיים ולראות שמקבלים איזשהו $e_{r'} - e_{s'} \in R$.

למעשה הדוגמה הזו היא בדיוק הדוגמה הקודמת, פשוט מהכיוון של מרחב אוקלידי.