אלגבראות לי

© ארזים

3 ביוני 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 מערכת השורשים באלגברת לי פשוטה למחצה ביחס לתת אלגברת קרטן מתפצלת מעל השדה

היינו באמצע הוכחת משפט:

משפט 1.1 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה, ותהי H תת אלגברת קרטן מתפצלת מעל F. נסמן $R = R$ נפרק

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} L^{\alpha} \right)$$

פירוק זה נקרא פירוק קרטן של L ביחס לתת האלגברה H. כל הבאים מתקיימים:

1. לכל $\alpha \in R\left(L, H\right)$ מתקיים $\dim L^{\alpha} = 1$.
2. (א) H תת אלגברה קומוטטיבית.
   (ב) לכל $h \in H$ ולכל $x \in L_H^{\alpha}$ מתקיים $\mathrm{ad}_L h\left(x\right) = \left[h, x\right] = \alpha\left(h\right) \cdot x$.
   (ג) לכל $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$ מתקיים $\left[L^{\alpha}, L^{\beta}\right] \subset L^{\alpha+\beta}$.
   (ד) לכל $\alpha \in R$ גם $-\alpha \in R$.
   (ה) לכל $\alpha \in R$ נקבל $\left[L^{\alpha}, L^{-\alpha}\right] = H_{\alpha}$ ממימד 1 ונוצר על ידי איבר h_{α} עבורו $\alpha\left(h_{\alpha}\right) = 2$.
3. (א) לכל $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$ כך שמתקיים $\alpha + \beta \neq 0$ מתקיים $\kappa_L\left(L^{\alpha}, L^{\beta}\right) = 0$.
   (ב) לכל $\alpha \in R \cup \{0\}$, התבנית $\kappa_L \mid_{L^{\alpha} \times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת. בפרט, התבנית $\kappa_L \mid_{H \times H}$ לא מנוונת.
   (ג) לכל $x, y \in H$ מתקיים

$$\kappa_L\left(x, y\right) = \sum_{\alpha \in R} \alpha\left(x\right) \alpha\left(y\right)$$

4. (א) מתקיים $H^* = \mathrm{Span} R$.

(ב) מתקיים $H=\mathrm{Span}\left\{h_\alpha \mid \alpha\in R\right\}$.

5. לכל $\alpha\in R$ תת המרחב

$$S_\alpha=H_\alpha\oplus L^\alpha\oplus L^{-\alpha}$$

הוא תת אלגברת לי ממימד 3. נבחר $x_\alpha\in L^\alpha$. אז יש איבר $x_{-\alpha}\in L^{-\alpha}$ יחיד כך שמתקיים $[x_\alpha,x_{-\alpha}]=h_\alpha$. נתבונן בהעתקה הלינארית

$$\begin{aligned}\varphi:\mathrm{sl}_2F&\to S_\alpha\\ \varphi(e)&=x_\alpha\\ \varphi(h)&=h_\alpha\\ \varphi(f)&=x_{-\alpha}\end{aligned}$$

ונקבל איזומורפיזם של אלגבראות לי.

הוכחה: נמשיך מאיפה שעצרנו ־ ראינו כבר את 2ג, 2ד, 3א, 3ב, ואת סעיף 4. נחזור על החלק האחרון מהפעם הקודמת:

יהי $h\in H$. נכתוב את פירוק ז'ורדן־שבליי שלו: $h=h_s+h_n$. אזי גם

$$\mathrm{ad}_Lh=\mathrm{ad}_Lh_s+\mathrm{ad}_Lh_n$$

פירוק ז'ורדן־שבליי. כזכור, L^α חלקי למרחב העצמי המוכלל של ad_Lh ביחס לערך העצמי $\alpha(h)$. לכן, L^α חלקי למרחב העצמי של ad_Lh_s ביחס לערך העצמי $\alpha(h)$: לכל $x\in L^\alpha$ מתקיים

$$\mathrm{ad}h_s(x)=[h_s,x]=\alpha(h)\,x$$

בפרט (עבור $\alpha=0$) נקבל כי $[h_s,x]=0$ לכל $x\in H$, ובפרט $h_s\in N_L(H)=H$, שהרי H תת אלגברת קרטן. נסיק כי $h_s,h_n\in H$. הערכים העצמיים של $\mathrm{ad}h_n$ כולם אפס (כי הוא נילפוטנטי). מתקיים $h_n\in H$, ולכן הערכים העצמיים של ad_Lh_n הם $\{\alpha(h_n)\mid\alpha\in R\}\cup\{0\}$, ולכן $\alpha(h_n)=0$ לכל $\alpha\in R$. מסעיף 4, נקבל כי בהכרח $h_n=0$, כלומר $h=h_s$ פועל בצורה אלכסונית על L:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_Lh\mid_H&=0\\ \mathrm{ad}_Lh\mid_{L^\alpha}&=\alpha(h)\cdot\mathrm{id}_{L^\alpha}\end{aligned}$$

קיבלנו ליכסון סימולטני של כל האופרטורים $\{\mathrm{ad}_Lh\}_{h\in H}$. מכאן נקבל כי $\mathrm{ad}_L[H,H]=[\mathrm{ad}_LH,\mathrm{ad}_LH]=0$. ההעתקה ad_L חד־חד־ערכית, ולכן נקבל כי $[H,H]=0$. כמובן שראינו כי לכל $h\in H$, $x\in L^\alpha$ מתקיים $[h,x]=\alpha(h)\,x$. זה נותן לנו את סעיפים 2א, 2ב.

ראינו כי $\kappa\mid_{L^\alpha\times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת. נראה כי $[L^\alpha,L^{-\alpha}]=F\widetilde{h}_\alpha$, כאשר נסמן באופן כללי, לכל $\lambda\in H^*$ את האיבר היחיד $\widetilde{h}_\lambda$ עבורו

$$\lambda(h)=\kappa\left(h,\widetilde{h}_\lambda\right)$$

וזה קיים שהרי התבנית $\kappa|_{H\times H}$ לא מנוונת. בהינתן $x\in L^\alpha,y\in L^{-\alpha}$, נחשב:

$$\begin{aligned}\kappa([x,y],h)=\kappa(x,[y,h])&\overset{[h,y]=-\alpha(h)y}{=}\alpha(h)\,\kappa(x,y)=\kappa\left(h,\widetilde{h}_\alpha\right)\kappa(x,y)=\\ &=\kappa\left(\kappa(x,y)\,\widetilde{h}_\alpha,h\right)\end{aligned}$$

זה נכון לכל $h\in H$, והרי $\kappa\mid_{H\times H}$ לא מנוונת, $[x,y]\in H$, נקבל כי בהכרח

$$[x,y]=\kappa(x,y)\widetilde{h}_{\alpha}\in F\widetilde{h}_{\alpha}$$

בגלל שראינו שהתבנית $\kappa\mid_{L^{\alpha}\times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת נקבל כי

$$\kappa\left(L^{\alpha},L^{-\alpha}\right)=F$$

ולכן נקבל כי

$$\left[L^{\alpha},L^{-\alpha}\right]=F\widetilde{h}_{\alpha}$$

נראה כעת כי

$$\alpha\left(\widetilde{h}_{\alpha}\right)\neq0$$

נניח בשלילה שזה כן אפס. ניקח $x_0\in L^{\alpha},y_0\in L^{-\alpha}$ המקיימים $\kappa(x_{\alpha},y_{\alpha})=1$. נגדיר

$$L'=F\widetilde{h}_{\alpha}\oplus Fx_0\oplus Fy_0$$

מתקיים $[x_0,y_0]=\widetilde{h}_{\alpha}$ ומכאן ומחישובים קלים נובע כי L' אלגברת לי נילפוטנטית. נרחיב סקלרים אל $\overline{F}$. $L'_{\overline{F}}\subset L_{\overline{F}}$ נילפוטנטית. נתבונן בהצגה

$$\pi_{\overline{F}}(\zeta)=\mathrm{ad}_{L_{\overline{F}}}(\zeta)$$

של $L'_{\overline{F}}$ שהיא הרחבת סקלרים של ההצגה $\pi(z)=\mathrm{ad}_{L}z$ של L' בתוך L. $L'_{\overline{F}}$נילפוטנטית ולכן נקבל שילוש סימולטני של ההצגה - ובפרט נקבל שהערכים העצמיים של כל הקומוטטורים הם 0. לכן בפרט הערכים העצמיים של $\widetilde{h}_{\alpha}$ הם 0, והערכים העצמיים שלו הם $\left\{\beta\left(\widetilde{h}_{\alpha}\right)\mid\beta\in R\right\}\cup\{0\}$, כלומר $0=\beta\left(\widetilde{h}_{\alpha}\right)$ לכל $\beta\in R$ - ולכן מסעיף 4א נקבל כי $\widetilde{h}_{\alpha}=0$ בסתירה.

כעת נוכל לנרמל ולקבל $h_{\alpha}=c\widetilde{h}_{\alpha}$ שמקיים $\alpha(h_{\alpha})=2$, וזה סעיף 2ה. כעת נראה כי $H=\mathrm{Span}\{h_{\alpha}\mid\alpha\in R\}$, כלומר סעיף 4ב. בשלילה, נניח אגף ימין מוכל ממש בשמאל. אזי יש $0\neq\lambda\in H^{*}$ המקיים

$$\lambda(h_{\alpha})=0$$

לכל $\alpha\in R$. לכן

$$2=\alpha(h_{\alpha})=c\alpha\left(\widetilde{h}_{\alpha}\right)=c\kappa\left(\widetilde{h}_{\alpha},\widetilde{h}_{\alpha}\right)$$

ולכן נקבל כי

$$h_{\alpha}=\frac{2\widetilde{h}_{\alpha}}{\kappa\left(\widetilde{h}_{\alpha},\widetilde{h}_{\alpha}\right)}$$

וכעת

$$0=\lambda(h_{\alpha})=\frac{2}{\kappa\left(\widetilde{h}_{\alpha},\widetilde{h}_{\alpha}\right)}\lambda\left(\widetilde{h}_{\alpha}\right)$$

ולכן

$$0=\lambda\left(\widetilde{h}_\alpha\right)=\kappa\left(\widetilde{h}_\alpha,\widetilde{h}_\lambda\right)=\alpha\left(\widetilde{h}_\lambda\right)$$

ולכן $\alpha\left(\widetilde{h}_\lambda\right)=0$, לכל $\alpha\in R$. מסעיף 4א נקבל כי $\widetilde{h}_\lambda=0$, כלומר $\lambda=0$, בסתירה.

כעת, יהי $\alpha\in R$. נקבע $0\neq x_\alpha\in L^\alpha$. יש $x_{-\alpha}\in L^{-\alpha}$ יחיד עבורו $[x_\alpha,x_{-\alpha}]=h_\alpha$. נגדיר כעת

$$S_\alpha=Fx_\alpha\oplus Fh_\alpha\oplus Fx_{-\alpha}$$

זאת תת אלגברת לי, כי

$$\begin{aligned}
[h_\alpha,x_\alpha]&=\alpha\left(h_\alpha\right)x_\alpha=2x_\alpha\\
[h_\alpha,x_{-\alpha}]&=-\alpha\left(h_\alpha\right)x_{-\alpha}=-2x_{-\alpha}\\
[x_\alpha,x_{-\alpha}]&=h_\alpha
\end{aligned}$$

נגדיר

$$\varphi:\mathrm{sl}_2F\to S_\alpha$$

לפי

$$\begin{aligned}
\varphi\left(e\right)&=x_\alpha\\
\varphi\left(h\right)&=h_\alpha\\
\varphi\left(f\right)&=x_{-\alpha}
\end{aligned}$$

זהו איזומורפיזם של מרחבים ווקטוריים שהוא גם איזומורפיזם של אלגבראות לי, וזה מוכיח את סעיף 5. נותר לנו רק את סעיף 1. נניח בשלילה שיש $\alpha\in R$ עבורו $\dim L^\alpha>1$. לכן גם

$$\dim L^{-\alpha}=\dim L^\alpha>1$$

יהי $0\neq y\in L^{-\alpha}$. התבנית $\kappa\mid_{L^\alpha\times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת, ולכן יש $0\neq x_\alpha\in L^\alpha$ שמקיים $\kappa\left(x_\alpha,y\right)=0$. כמו קודם, יש $x_{-\alpha}\in L^{-\alpha}$ יחיד עבורו $[x_\alpha,x_{-\alpha}]=h_\alpha$, ונתבונן במרחב S_α שהגדרנו קודם. ניקח את האיזומורפיזם שהגדרנו קודם $\varphi:\mathrm{sl}_2F\xrightarrow{\sim}S_\alpha$. נתבונן בהצגה של sl_2F המוגדרת על ידי

$$\rho\left(x\right)=\mathrm{ad}_L\varphi\left(x\right)$$

אזי

$$\rho\left(e\right)\left(y\right)=\left[\varphi\left(e\right),y\right]=\left[x_\alpha,y\right]=\kappa\left(x_\alpha,y\right)\widetilde{h}_\alpha=0$$

כעת יש פירוק

$$\rho\cong\bigoplus_{i=1}^{k}\rho_{r_i}$$

כאשר $0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_k$, וההצגה ρ_{r_i} היא ההצגה היחידה של sl_2F ממימד r_i+1, כפי שראינו כשדיברנו על ההצגות של sl_2F. למרחב ההצגה V_{ρ_r} יש בסיס של ווקטורים עצמיים של $\rho_r(h)$ שנסמנו

$$v_0, \ldots, v_r$$

כאשר

$$\rho_r(h)\, v_j = (r-2j)\, v_j$$

כמו כן ניזכר כי

$$\begin{aligned} &\rho_r(e)\, v_j = j(r-j+1)\, v_{j-1} \\ &\rho_r(e)\, v_0 = 0 \end{aligned}$$

ראינו כי y הוא ווקטור עצמי של $\rho(e)$ ביחס לערך העצמי 0. נסמן את הבסיס שדיברנו עליו עכשיו שמתאים להצגה ρ_{r_i} בתור $\{y_{i,0}, \ldots, y_{i,r_i}\}$ ואז

$$\begin{aligned} &\rho(h)\, y_{i,j} = (r_i-2j)\, y_{i,j} \\ &\rho(e)\, y_{i,j} = j(r_i-j+1)\, y_{i,j-1} \\ &\rho(e)\, y_{i,0} = 0 \end{aligned}$$

נסיק כי

$$y = \sum_{i=1}^{k} a_i y_{i,0}$$

כעת מתקיים

$$\rho(h)(y) = [\varphi(h), y] = [h\alpha, y] = -2y$$

כמו כן, מתקיים

$$\rho(h)(y) = \sum_{i=1}^{k} a_i \rho(h)\, y_{i,0} = \sum_{i=1}^{k} a_i r_i y_{i,0}$$

בסך הכל נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{k} (-2a_i)\, y_{i,0} = \sum_{i=1}^{k} a_i r_i y_{i,0}$$

ולכן נקבל כי

$$a_i r_i = -2a_i$$

לכל i. כיוון שידוע לנו כי $r_i \geq 0$ נקבל $a_i = 0$ לכל i, ואז $y=0$ ־ בסתירה. לכן הוכחנו גם את סעיף 1. נציב זאת בנוסחה שראינו כבר בעבר כדי לקבל את 3ג ונסיים את המשפט. ■

מסקנה 1.2 בהנחות המשפט, L נוצרת על ידי מרחבי השורש L^{α} עבור $\alpha \in R$.

הוכחה: ראינו כי

$$H=\sum_{\alpha\in R}Fh_{\alpha}=\sum_{\alpha\in R}\left[L^{\alpha},L^{-\alpha}\right]$$

ולכן

$$L=\sum_{\alpha\in R}\left(L^{\alpha}\oplus\left[L^{\alpha},L^{-\alpha}\right]\oplus L^{\alpha}\right)$$

■

דוגמה ניקח $L=\mathrm{sl}_{n}F$,

$$H=\left\{ \begin{pmatrix}h_{1} & & 0\\ & \ddots\\ 0 & & h_{n} \end{pmatrix}\mid\sum_{i=1}^{n}h_{i}=0\right\}$$

זו תת אלגברת קרטן של מטריצות אלכסוניות מעקבה 0. נכתוב

$$L=H\oplus\left(\bigoplus_{i\neq j}Fe_{i,j}\right)=H\oplus\left(\bigoplus_{i\neq j}L^{\alpha_{i,j}}\right)$$

עבור $h\in H$ נקבל

$$\mathrm{ad}h\left(e_{i,j}\right)=\left[h,e_{i,j}\right]=he_{i,j}-e_{i,j}h=h_{i}e_{ij}-h_{j}e_{i,j}\left(h_{i}-h_{j}\right)\left(e_{i,j}\right)$$

נסמן

$$\alpha_{i,j}\left(h\right)=h_{i}-h_{j}$$

ואז נקבל כי

$$L^{\alpha_{i,j}}=Fe_{i,j}$$

כאשר $i\neq j$, כלומר

$$R=R\left(L,H\right)=\left\{ \alpha_{i,j}\mid i\neq j\right\}$$

כעת,

$$\left[L^{\alpha_{i,j}},L^{\alpha_{r,s}}\right]=F\left[e_{i,j},e_{r,s}\right]$$

כעת

$$\left[e_{i,j},e_{r,s}\right]=e_{i,j}e_{r,s}-e_{r,s}e_{i,j}=\delta_{jr}e_{i,s}-\delta_{si}e_{r,j}$$

נקבל

$$[e_{i,j}, e_{r,s}] = \begin{cases} 0 & i \neq s, j \neq r \\ e_{i,s} & j = r, i \neq s \\ e_{i,i} - e_{j,j} & j = r, i = s \end{cases}$$

כלומר,

$$\left[L^{\alpha_{i,j}}, L^{\alpha_{r,s}}\right] = \begin{cases} 0 & i \neq s, j \neq r \\ L^{\alpha_{i,s}} & r = j, s \neq i \\ F\left(e_{i,i} - e_{j,j}\right) & r = j, s = i \end{cases}$$

נקבל כי

$$\alpha_{i,j}\left(e_{i,i} - e_{j,j}\right) = 1 - (-1) = 2$$

כלומר

$$h_{\alpha_{i,j}} = e_{i,i} - e_{j,j}$$

לבסוף, ראינו את תבנית קילינג:

$$\kappa(x, y) = 2n\mathrm{tr}(xy)$$

כלומר, אם $h, h' \in H$ נקבל

$$\kappa(h, h') = 2n\mathrm{tr}(hh') = 2n\sum_{i=1}^{n} h_i h'_i$$

במשפט ראינו כי

$$\begin{aligned} \kappa(h, h') &= \sum_{\alpha \in R} \alpha(h)\,\alpha(h') = \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j}(h)\,\alpha_{i,j}(h') = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (h_i - h_j)\left(h'_i - h'_j\right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} h_i h'_i - \sum_{i,j=1}^{n} h_i h'_j - \sum_{i,j=1}^{n} h_j h'_i + \sum_{i,j=1}^{n} h_j h'_j = \\ &= 2n\sum_{i=1}^{n} h_i h'_i - 2\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} h'_j\right) \end{aligned}$$

המחוסר הימני הוא 0 כי כל סכום הוא 0 ־ אלה העקבות של איברים מתוך $\mathrm{sl}_n F$, כלומר 0. כעת,

$$S_{\alpha_{i,j}} = Fx_{\alpha_{i,j}} + Fh_{\alpha_{i,j}} + Fx_{-\alpha_{i,j}} = Fe_{i,j} + F\left(e_{i,i} - e_{j,j}\right) + Fe_{j,i}$$

זהו אוסף המטריצות שבמקום i, i יש להן מספר a, במקום j, j יש $-a$, ובמקומות i, j, j, i יש מספרים כלשהם. בכל שאר המקומות יש 0.

משפט 1.3 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה.

1. יהי $x \in L$ איבר גנרי. אזי x פשוט למחצה. תת אלגברת קרטן היחידה שמכילה את x היא מרכז של x בתוך L, שאנחנו מסמנים $c_L\left(x\right)$.
2. תהי $H \subset L$ תת אלגברת קרטן. אזי H תת אלגברה קומוטטיבית מקסימלית. כל איברי H פשוטים למחצה. H רדוקטיבית בתוך L.
3. תהי $\mathcal{E}$ קבוצת כל תת אלגבראות לי הקומוטטיביות שאיבריהן פשוטים למחצה. אזי האיברים המקסימליים בקבוצה $\mathcal{E}$ ביחס להכלה הם בדיוק כל תתי אלגבראות קרטן של L.
4. יהי $x \in L$ איבר פשוט למחצה. אזי x מוכל בתת אלגברת קרטן. x איבר גנרי אם ורק אם $\dim c_L\left(x\right) = \operatorname{rank}\left(L\right)$.

הוכחה:

1. כזכור, x גנרי ולכן תת אלגברת קרטן היחידה שמכילה אותו היא $L^0\left(x\right)$. נניח קודם כי F סגור אלגברית, ואז $H = L^0\left(x\right)$ מתפצלת. לכן, מהמשפט הקודם, H קומוטטיבית וכל איבריה פשוטים למחצה (פועלים באופן אלכסוני לפי פירוק קרטן $(L = H \oplus \left(\bigoplus L^\alpha\right)$. $x \in H$ ולכן גם x פשוט למחצה, ולכן

$$L^0\left(x\right) = \left\{z \in L \mid [x,z] = 0\right\} = c_L\left(x\right)$$

זאת משום שהמרחב העצמי המוכלל שווה למרחב העצמי (בגלל האלכסוניות). במקרה הכללי, ראינו כי $L_{\overline{F}}$ פשוטה למחצה, $x \otimes 1$ גנרי ולכן $x \otimes 1$ פשוט למחצה (כלומר ניתן ללכסון) ולפי הגדרה x פשוט למחצה. ראינו גם כי

$$L^0_{\overline{F}}\left(x \otimes 1\right) = L^0\left(x\right) \otimes_F \overline{F}$$
$$L^0_{\overline{F}}\left(x \otimes 1\right) = c_{L_{\overline{F}}}\left(x \otimes 1\right)$$

ולכן נובע גם כי

$$L^0\left(x\right) = c_L\left(x\right)$$

הכלה אחת תמיד נכונה ($\supset$), והשנייה נובעת מהשוויון האחרון שכתבנו - יהי $y \in L^0\left(x\right)$, אזי $y \otimes 1 \in L^0_{\overline{F}}\left(x \otimes 1\right) = c_{L_{\overline{F}}}\left(x \otimes 1\right)$ כלומר

$$0 = [y \otimes 1, x \otimes 1] = [y,x] \otimes 1$$

כלומר $[y,x] = 0$, כלומר $y \in c_L\left(x\right)$.

2. אנחנו יודעים כי $H_{\overline{F}} \subset L_{\overline{F}}$ תת אלגברת קרטן, שמתפצלת מעל $\overline{F}$, ולכן היא קומוטטיבית - ומכאן H קומוטטיבית. כמו כן, ראינו כי איברי $H_{\overline{F}}$ פשוטים למחצה ולכן גם איברי H. אי $H \subset H'$ תת אלגברת לי קומוטטיבית אזי בפרט H' נילפוטנטית, והרי H תת אלגברת לי נילפוטנטית מקסימלית, ולכן $H' = H$. כזכור, מעל שדה סגור אלגברית, הראינו כבר כי H רדוקטיבית בתוך L (שכן כל איבריה ניתנים לשילוש סימולטני) - ולכן אם נרחיב סקלרים נקבל כי $H_{\overline{F}}$ רדוקטיבית בתוך $L_{\overline{F}}$, כלומר ההצגה $\mathrm{ad}_{L_{\overline{F}}} H_{\overline{F}}$ פריקה לחלוטין. הצגה זו היא הרחבת סקלרים של ההצגה $\mathrm{ad}_L\mid_H$ - ולכן גם ההצגה הזו היא פריקה לחלוטין. לפי תרגיל 4 בדף 3, $\mathrm{ad}_L\mid_H$ פריקה לחלוטין כלומר H רדוקטיבית בתוך L.

3. תהי $H \subset L$ תת אלגברת לי קומוטטיבית שכל איבריה פשוטים למחצה. לכן האלגברה $\mathrm{ad}_{L_{\overline{F}}} H_{\overline{F}}$ היא קבוצה קומוטטיבית של אופרטורים ניתנים ללכסון על $L_{\overline{F}}$, ולכן ניתנת ללכסון סימולטני. בפרט $H_{\overline{F}}$ רדוקטיבית בתוך $L_{\overline{F}}$. כמו קודם נסיק כי H רדוקטיבית בתוך L. נסמן $N = N_L(H)$, אזי $[H,N] \subset H \subset N$. לכן $N \subset L$ תת מרחב אינווריאנטי להצגה של H שהיא $\mathrm{ad}_L \mid_H$. זאת הצגה פריקה לחלוטין כפי שהסברנו לפני רגע, ולכן יש פירוק $N = H \oplus N'$ כאשר $[H,N'] \subset N'$. מכאן,

$$[H,N'] \subset N' \cap H = 0$$

לכן

$$[H,N] = [H,H] + [H,N'] = 0$$

כלומר

$$N \subset c_L(H)$$

ההכלה בכיוון ההפוך תמיד נכונה. כלומר, קיבלנו כי $N_L(H) = c_L(H)$. נסמן $C = N_L(H) = c_L(H)$. נראה כי C רדוקטיבית בתוך L. כיוון שראינו כבר כי H רדוקטיבית בתוך L נקבל כי

$$L = C \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} V_i \right)$$

כאשר V_i מודולים אי פריקים מעל H (ביחס להצגה $\mathrm{ad}_L \mid_H$). נראה כעת כי

$$\bigoplus_{i=1}^{k} V_i = [L,H]$$

יהי $1 \leq i \leq k$ כלשהו, ויהי $v \in V_i$ כלשהו. אזי

$$S_v = \sum_{l \geq 1} \mathrm{Span}\left\{ \mathrm{ad}h_1 \circ \cdots \circ \mathrm{ad}h_l(v) \mid h_1, \ldots, h_l \in H \right\} \subset V_i$$

נשים לב כי $S_v \neq 0$, לכל $v \neq 0$. המרחב S_v אינווריאנטי לפעולת $\mathrm{ad}_L \mid_H$ והמרחב V_i אי פריק, ולכן נקבל כי $S = V_i$. ברור כי

$$V_i \subset [L,H] = \sum_{w \in L} [H,w]$$

נסיק כי בהכרח

$$L = C + [L,H]$$

נסמן

$$L' = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$$

אזי

$$[L,H]=[C,H]+[L',H]=[L',H]\subset\sum[H,V_i]\subset\sum V_i=L'$$

נסיק כי

$$C\cap[L,H]=0$$

ובעצם

$$[L,H]=L'$$

כלומר קיבלנו פירוק

$$L=C\oplus[L,H]$$

לכל $c\in C,x\in L,h\in H$ נקבל

$$\kappa\left(c,[x,h]\right)=\kappa\left([c,h],x\right)=\kappa\left(0,x\right)=0$$

אם כן המחוברים ניצבים ביחס לתבנית קילינג, ולכן היא חייבת להיות לא מנוונת על כל מחובר, ובפרט על C. כעת יהי $x\in C$, ונכתוב את פירוק ז'ורדן־שבליי שלו:

$$x=x_s+x_n$$

כיוון שלכל $h\in H$ האופרטור ad_Lx מתחלף עם ad_Lh, גם $\mathrm{ad}_Lx_s,\mathrm{ad}_Lx_n$ מתחלפים עם ad_Lh, כלומר $\mathrm{ad}_L[x_s,h]=\mathrm{ad}_L[x_n,h]=0$ לכל $h\in H$, ולכן $[x_s,h]=[x_n,h]=0$ לכל $h\in H$, כלומר $x_s,x_n\in C$. לפי משפט שהוכחנו בעבר, שני התנאים האחרונים שהוכחנו על C מבטיחים שהיא רדוקטיבית בתוך L. בפרט, יש תת מרחב $C'\subset C$ עבורו $C=H\oplus C'$, כאשר $[C,C']\subset C'$. כעת C' היא אלגברת לי. נראה כי C' רדוקטיבית בתוך L. ראשית, נכתוב

$$L=C\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{r}U_j\right)$$

פירוק של L, כאשר U_j אי פריק מעל C. כמובן, U_j מודול מעל C' ־ ניקח $U_j^0\subset U_j$ תת מודול אי פריק מעל C'. לכל $h\in H$, $[h,C']=0$, ולכן האופרטור

$$\mathrm{ad}h:U_j\to U_j$$

מתחלף עם $\mathrm{ad}C'$. מכאן נקבל כי

$$\mathrm{ad}h\left(U_j^0\right)\subset U_j$$

תת מודול אי פריק מעל C' (אם הוא לא 0). נגדיר

$$U_j'=\sum_{k,h_1,\dots,h_k}\mathrm{ad}h_1\circ\cdots\circ\mathrm{ad}h_k\left(U_j'\right)\subset U_j$$

זהו סכום תת מודולים אי פריקים מעל C' (אולי לא סכום ישר). הוא אינווריאנטי לפעולת $\mathrm{ad}_L H$. לכן $U_j' \subset U_j$ תת מודול (שאינו אפס) מעל C, ולכן $U_j = U_j'$ סכום של תת מודולים אי פריקים מעל C', ולכן גם הסכום של אותם U_j הוא סכום של תת מודולים אי פריקים מעל C'. נותר לפרק רק את C:

$$C = H \oplus C' = H \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{l} W_i \right)$$

כאשר W_i אי פריקים מעל C, ובעצם אי פריקים גם מעל C'. בסך הכל קיבלנו פירוק של L לתת מרחבים אי פריקים ביחס לפעולת C'. מכאן אפשר להוכיח באופן כללי שאפשר להגיע לסכום ישר, ולכן C' רדוקטיבית מעל L. נמשיך את ההוכחה בפעם הבאה.

■