אלגבראות לי

ⓒ ארזים

27 במאי 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 תתי אלגבראות של קרטן

ניזכר בדברים האחרונים שראינו. לכל $x \in L$ יש לנו האופרטור $\mathrm{ad}_L x : L \to L$, ויש לנו הפירוק

$$L = L^0\left(x\right) \oplus L^*\left(x\right)$$

כאשר

$$L^0\left(x\right) = \left\{y \in L \mid \exists n \geq 1\, \mathrm{ad}_L^n x\left(y\right) = 0\right\}$$

$$L^*\left(x\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathrm{ad}_L^j x$$

כמו כן, האופרטור $\mathrm{ad}_L x \mid_{L^0(x)}$ נילפוטנטי, והאופרטור $\mathrm{ad}_L x \mid_{L^*(x)}$ הפיך. אם נסמן $H_x = Fx$, נקבל

$$L = \bigoplus_{\lambda} L_{H_x}^{\lambda}$$

כאשר

$$L_{H_x}^{\lambda} = \left\{y \in L \mid \exists n \geq 1\, \left(\mathrm{ad}_L x - \lambda I\right)^n\left(y\right) = 0\right\}$$

ונסמן $L^{\lambda}\left(x\right) = L_{H_x}^{\lambda}$. כמובן מתקיים $L_{H_x}^0 = L^0\left(x\right)$. ראינו כי $L^0\left(x\right) \subset L$ תת אלגברת לי. נראה כי

$$\left[L^0\left(x\right), L^*\left(x\right)\right] \subset L^*\left(x\right)$$

נניח ראשית כי F סגור אלברית. אזי

$$L = L^*\left(x\right) \oplus \left(\bigoplus_{0 \neq \lambda} L^{\lambda}\left(x\right)\right)$$

ראינו כי

$$L^*\left(x\right) = \bigoplus_{\lambda \neq 0} L^{\lambda}\left(x\right)$$

כמו כן ראינו גם כי

$$\left[L^{\lambda}(x), L^{\mu}(x)\right] \subset L^{\lambda+\mu}(x)$$

בפרט, מתקיים

$$\left[L^{0}(x), L^{\lambda}(x)\right] \subset L^{\lambda}(x)$$

ולכן

$$\left[L^{0}(x), L^{*}(x)\right] = \left[L^{0}(x), \bigoplus_{i=1}^{k} L^{\lambda_i}(x)\right] = \bigoplus_{i=1}^{k}\left[L^{0}(x), L^{\lambda_i}(x)\right] \subset \bigoplus_{i=1}^{k} L^{\lambda_i}(x) = L^{*}(x)$$

עברו שדה כללי, קל לבדוק כי

$$\left(L_{\overline{F}}\right)^{0}(x\otimes 1) = \left(L^{0}(x)\right)_{\overline{F}}$$
$$\left(L_{\overline{F}}\right)^{*}(x\otimes 1) = \left(L^{*}(x)\right)_{\overline{F}}$$

לכן למעשה הראינו כי במקרה זה כי

$$\left[\left(L_{\overline{F}}\right)^{0}(x\otimes 1), \left(L_{\overline{F}}\right)^{*}(x\otimes 1)\right] \subset \left(L_{\overline{F}}\right)^{*}(x\otimes 1)$$
$$\left[L^{0}(x), L^{*}(x)\right]_{\overline{F}} \subset \left(L^{*}(x)\right)_{\overline{F}}$$

ולכן נקבל את מה שרצינו.

משפט 1.1 יהי $x \in L$ איבר גנרי. אז $L^{0}(x)$ היא תת אלגברת קרטן. זוהי תת אלגברית קרטן היחידה שמכילה את x.

הוכחה: נסמן $T = L^{0}(x)$. נגדיר

$$S = \left\{y \in T \mid \mathrm{ad}y\mid_{L^{*}(x)} \text{ is invertible}\right\}$$
$$R = \left\{y \in T \mid \mathrm{ad}y\mid_{T} \text{ is not nilpotent }\right\}$$

נשים לב שמתיים $x \in S$. הקבוצות $R, S \subset T$ הן קבוצות פתוחות זריצקי (מוגדרות על ידי אי התאפסות של פולינומים):ככא

$$y \in S \iff \det \mathrm{ad}Y\mid_{L^{*}(x)} \neq 0$$

שזו פונקציה פולינומיאלית על T, $f \in F[T]$. כעת,כאשר

$$\det\left(tI_t - \mathrm{ad}y\mid_{T}\right) = t^{l} + a_{l-1}(y)\,x^{l-1} + ... + a_0(y)$$

כאשר כמובן $l = \dim L$. לכן,

$$R = T\setminus\left\{y \in T \mid a_0(y) = \cdots = A_{l-1}(y) = 0\right\}$$

כעת נראה כי R ריקה. נניח בשלילה שלא. אזי $R \cap S \neq 0$ (כי כל שתי קבוצות פתוחות זריצקי לא ריקות נחתכות). יהי $y \in R \cap S$. נחשב את הפולינום האופייני של $\mathrm{ad}_L y$ לפי הפירוק

$$L = L^{0}(x) \oplus L^{*}(x)$$

אנחנו יודעים כי $\mathrm{ad}_L y \mid_{L^*(y)}$ הפיך, ולכן $\lambda = 0$ אינו שורש של הפולינום האופייני של הצמצום הזה. הפולינום האופייני של $\mathrm{ad}_L y \mid_T$ הוא מהצורה $t^s g(t)$, כאשר $g(0) \neq 0$. כעת, $\mathrm{ad}_L y \mid_T$ לא נילפוטנטי, ולכן $s < \dim T$. לכן s הוא הריבוי של $\lambda = 0$ בפולינום האופייני של $\mathrm{ad}_L y$, כלומר $s = \dim L^0(y)$. לכן

$$\dim L^0(y) = s < \dim T = \dim L^0(x)$$

בסתירה להנחה כי x גנרי. אם כן, R ריקה, כלומר לכל $y \in T$ האופרטור $\mathrm{ad}_T y$ נילפוטנטי. ממשפט אנגל, T אלגברת לי נילפוטנטית. נותר להראות רק כי $N_L(T) = T$ ונסיים.

נניח כי F סגור אלגברית. נפעיל את המשפט מהשיעור שעבר עבור $H_x = Fx$ ונקבל את הפירוק

$$L = L^0(x) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} L^{\lambda_i}(x) \right) = T \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} L^{\lambda_i}(x) \right)$$

במשפט הזה הראינו שאם $L^0(x) = T$ נילפוטנטית אז היא תת אלגברת קרטן - ולכן סיימנו במקרה זה. עבור F כללי נקבל כי $\left(L^0(x)\right)_{\overline{F}} = \left(L_{\overline{F}}\right)^0 (x \otimes 1)$ תת אלגברת קרטן של $L_{\overline{F}}$ ואז גם $L^0(x)$ תת אלגברת קרטן של L.

לבסוף, נניח כי $T_1 \subset L$ תת אלגברת קרטן המקיימת $x \in T_1$. T_1 נילפוטנטית, וכן $x \in T_1$ ולכן ברור כי $T_1 \subset L^0(x)$. ראינו כי תת אלגברת קרטן היא תת אלגברה נילפוטנטית מקסימלית. לכן, הואל וראינו כי $L^0(x)$ נילפוטנטית, נקבל $T_1 = L^0(x)$. ■

משפט 1.2 נניח כי F סגור אלגברית. תהי L אלגברת לי ממימד סופי מעל F. תהיינה $H, T \subset L$ תת אלגבראות קרטן. אזי יש אוטומורפיזם α של L ששייך לחבורת האוטומורפיזמים שנוצרת על ידי

$$\{\exp(\mathrm{ad}_L(x)) \mid \mathrm{ad}_L x \,\text{is nilpotent}\}$$

המקיים

$$\alpha(H) = T$$

הוכחה: ניזכר כי ראינו את הפירוק

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} L_H^{\lambda_i} \right)$$

כאשר $0 \neq \lambda_i \in H^*$. ראינו כי אם $x \in L_H^{\lambda_i}$ אזי $\mathrm{ad}_L x$ נילפוטנטי. יתר על כן, נניח כי $\dim L = r$ - נראה כי $\mathrm{ad}_L^r x = 0$. זאת משום שמתקיים

$$\mathrm{ad}^r x(L^\mu) \subset L^{r\lambda_i + \mu}$$

אם $\mathrm{ad}^r x \neq 0$, אזי יש μ עבורו

$$\mathrm{ad}^r x(L^\mu) \neq 0$$

ונקבל כי $L^{r\lambda_i+\mu}\neq 0$, ומכאן גם $L^{\mu},L^{\mu+\lambda_i},L^{\mu+2\lambda_i},\ldots$ גם כן אינם 0, ולכן כל אלה מופיעים בסכום הישר למעלה ־ כלומר

$$\dim L\geq\dim\left(\bigoplus_{j=0}^{r}L^{\mu+j\lambda_i}\right)=\sum_{j=0}^{r}\dim L^{\mu+j\lambda_i}\geq r+1$$

ולכן בהכרח $\mathrm{ad}^r x=0$. לכן למעשה נוכל לכתוב

$$\exp\left(\mathrm{ad}_L x\right)=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{ad}^j x}{j!}$$

נגדיר פונקציה

$$\begin{aligned}&f:H\times L_H^{\lambda_1}\times\cdots\times L_H^{\lambda_k}\to L\\&f\left(h,x_1,\ldots,x_k\right)=\exp\left(\mathrm{ad}_L x_1\right)\circ\cdots\circ\exp\left(\mathrm{ad}_L x_k\right)(h)\end{aligned}$$

נשים לב שזו פונקציה פולינומיאלית, שכן בעצם נקבל

$$f\left(h,x_1,\ldots,x_k\right)=\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{ad}^j x_1}{j!}\right)\circ\cdots\circ\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{ad}^j x_k}{j!}\right)(h)$$

נראה כי הפונקציה f דומיננטית ־ משמע, התמונה שלה צפופה זריצקי בתוך L.

אתנחתא: נתונה פונקציה פולינומיאלית בין מרחבים ווקטוריים $f:V\to U$. אז מוגדר ההומורפיזם של אלגבראות

$$\begin{aligned}&f^*:F\left[U\right]\to F\left[V\right]\\&f^*\left(\varphi\right)=\varphi\circ f\end{aligned}$$

f דומיננטית אם ורק אם f^* חד־חד־ערכי. נראה זאת: נניח כי $U=\overline{f\left(V\right)}$. נניח כי $\varphi\in\ker f^*$, כלומר $\varphi\circ f=0$, כלומר $\varphi\left(f\left(V\right)\right)=0$. לכן, $\varphi\left(U\right)=\varphi\left(\overline{f\left(V\right)}\right)=0$, כלומר $\varphi=0$. בכיוון השני, אם נניח כי f^* חד־חד־ערכית, נניח בשלילה כי $\overline{f\left(V\right)}\subsetneq U$, אז יש $0\neq\varphi\in F\left[U\right]$ שמקיים $\varphi\left(\overline{f\left(V\right)}\right)=0$, ולכן $f^*\left(\varphi\right)=\varphi\circ f=0$ כלומר $\varphi\in\ker f^*$ בסתירה.

נראה תנאי לכך שפונקציה f היא דומיננטית. נניח שקיים $v_0\in V$ עבורו $\mathrm{d}f\left(v_0\right)$ על. ההעתקה $\mathrm{d}f$ היא העתקה המשיק של f בנקודה v_0, שהיא העתקה לינארית בין V לבין U. העתקת משיק זו מתקבלת מתוך התבוננות בפונקצייה הפולינומיאלית:

$$v\mapsto f\left(v_0+v\right)=f\left(v_0\right)+D_1\left(v\right)+D_2\left(v\right)+\cdots+D_N\left(v\right)$$

כאשר $D_i:V\to U$ פונקציות פולינומיאליות הומוגניות מדרגה i, כלומר $D_i\left(tv\right)=t^iD_i\left(v\right)$. אם כן, $D_1:V\to U$ היא העתקה לינארית ־ והיא נקראת העתקת המשיק $\mathrm{d}f\left(v_0\right)$. אם כן, נקבל

$$\begin{aligned}&f\left(v_0+tv\right)=f\left(v_0\right)+tD_1\left(v\right)+t^2D_2\left(v\right)+\cdots+t^ND_N\left(v\right)\\&\frac{1}{t}\left(f\left(v_0+t\cdot v\right)-f\left(v_0\right)\right)|_{t=0}=D_1\left(v\right)=\mathrm{d}f\left(v_0\right)\end{aligned}$$

אם כן, נניח כי $\mathrm{d}f\left(v_0\right)$ על. לשם נוחיות, נניח כי $v_0=0$ ונניח כי $f\left(v_0\right)=0$. נניח בשלילה כי f לא דומיננטית. אזי f^* לא חד־חד־ערכית, ולכן יש פונקציה $0\neq\varphi\in F\left[U\right]$ עם $f^*\left(\varphi\right)=0$. נכתוב כעת

$$\varphi=\varphi_l+\varphi_{l+1}+\cdots+\varphi_m$$

כאשר $\varphi_j\in F\left[U\right]$ הומוגניות מדרגה j, $\varphi_l\neq 0$. מהנחת השלילה שלנו, לכל $v\in V$ מתקיים

$$\varphi\left(f\left(v\right)\right)=0=\sum_{j=l}^{m}\varphi_j\left(f\left(v\right)\right)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\left(\sum_{i=1}^{N}D_i\left(v\right)\right)$$

את האיבר הראשון בסכום זה נוכל לכתוב

$$\varphi_l\left(D_1\left(v\right)+\cdots+D_N\left(v\right)\right)=\varphi_l\left(D_1\left(v\right)\right)+\xi\left(v\right)$$

כאשר ξ פונקציה פולינומיאלית על V שהיא סכום של פולינומים הומוגניים מדרגות שגדולות ממש מאשר $l+1$. נסיק כי כל המחוברים ההומוגניים הם 0 (לפי הדרגות). בפרט, $\varphi_l\circ D_1=0$. הנחנו כי $D_1=\mathrm{d}f\left(v_0\right)$ על U, ולכן נקבל כי $\varphi_l=0$ ־ בסתירה.

משפט 1.3 נניח כי f דומיננטית, אזי לכל תת קבוצה פתוחה ולא ריקה $V'\subset V$ התמונה $f\left(V'\right)$ מכילה קבוצה פתוחה לא ריקה.

במשפט הזה נשתמש ללא הוכחה (הוא בא מהעולם של טופולוגיה אלגברית). נחזור לנקודה שהיינו ־

$$f:H\times L_H^{\lambda_1}\times\cdots\times L_H^{\lambda_k}\to L$$

$$f\left(h,x_1,\ldots,x_k\right)=\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{ad}^jx_1}{j!}\right)\circ\cdots\circ\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\mathrm{ad}^jx_k}{j!}\right)\left(h\right)$$

נחשב את $\mathrm{d}f\left(h_0,0,\ldots,0\right)$, שהיא העתקה לינארית. נקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f\left(h_0,0\ldots,0\right)\left(h,0,\ldots,0\right)&=\frac{1}{t}\left(f\left(h_0+th,0,\ldots,0\right)-f\left(h_0,0,\ldots,0\right)\right)=h\\ \mathrm{d}f\left(h_0,0,\ldots,0\right)\left(0,x_1,0,\ldots,0\right)&=\frac{1}{t}\left(f\left(h_0,tx_1,0,\ldots,0\right)-f\left(h_0,0,\ldots,0\right)\right)=\frac{1}{t}\left(\exp\left(tx_1\right)\left(h_0\right)-h_0\right)=\\ &=\frac{1}{t}\left(h_0+\mathrm{ad}x_1\left(h_0\right)+\frac{t^2}{2}\mathrm{ad}^2x_1\left(h\right)+\cdots-h_0\right)=\\ &=|_{t=0}\,\mathrm{ad}x_1\left(h_0\right)=\left[x_1,h_0\right]\in L_H^{\lambda_1}\end{aligned}$$

אם כן,

$$\mathrm{d}f\left(h_0,0\ldots,0\right)\left(h,x_1,\ldots,x_k\right)=h+\sum_{i=1}^{k}\left[x_i,h_0\right]$$

נגדיר כעת

$$H'=\left\{h_0\in H\mid\lambda_1\left(h_0\right),\ldots,\lambda_k\left(h_0\right)\neq 0\right\}$$

זו תת קבוצה פתוחה זריצקי. לכל $h_0 \in H'$ נקבל כי לאופרטור $\mathrm{ad}_L h_0 \mid_{L_H^{\lambda_i}}$ יש ערך עצמי אחד בלבד, והוא λ_i ־ שאינו אפס, כלומר האופרטור הזה הפיך. לכן

$$\mathrm{ad} h_0 \left(L_H^{\lambda_i}\right) = \left[L_H^{\lambda_i}, h_0\right] = L_H^{\lambda_i}$$

זה מבטיח שהעתקת המשיק $\mathrm{d}f\,(h_0, 0 \ldots, 0)$ חד־חד־ערכית ועל ־ ולכן בפרט f דומיננטית. לפי המשפט שציטטנו בלי להוכיח, התמונה $f\left(H' \times L_H^{\lambda_1} \times \cdots \times L_H^{\lambda_k}\right)$ מכילה תת קבוצה פתוחה זריצקי A שאינה ריקה. נעשה אותו דבר עבור T ונמצא תת קבוצה פתוחה $\emptyset \neq B \subset L$ פתוחה כמו למעלה. אזי

$$A \subset \bigcup_{s \in \mathrm{Aut}_e(L)} s\left(H'\right)$$

כאשר $\mathrm{Aut}_e(L)$ היא חבורת האוטומורפיזמים של L שנוצרת על ידי

$$\left\{\exp\left(\mathrm{ad}_L x\right) \mid \mathrm{ad} x \, \text{is nilpotent}\right\}$$

ובאותה צורה

$$B \subset \bigcup_{s \in \mathrm{Aut}_e(L)} s\left(T'\right)$$

יש לנו שתי קבוצות פתוחות זריצקי לא ריקות, ולכן החיתוך $A \cap B$ גם כן לא ריק. לכן יש $h_1 \in H', t_1 \in T', s_1, s_2 \in \mathrm{Aut}_e(L)$ עבורם

$$s_1\left(h_1\right) = s_2\left(t_1\right)$$

נסמן

$$\alpha = s_1^{-1} s_2$$

אזי $\alpha \in \mathrm{Aut}_e(L)$, וכן $\alpha\left(t_1\right) = h_1$. נראה כי

$$H = L^0\left(h_1\right)$$

כמובן שמתקיים $H \subset L^0\left(h_1\right)$ שכן H נילפוטנטית. להיפך, אם $y \in L^0\left(h_1\right)$, נכתוב את y לפי הפירוק:

$$y = v_0 + v_1 \cdots + v_k$$

כאשר $v_0 \in H, v_i \in L_H^{\lambda_i}$. עבור n טבעי גדול מספיק נקבל כי

$$0 = \mathrm{ad}^n h_1\left(y\right) = \mathrm{ad}^n h_1\left(v_0\right) + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{ad}^n h_1\left(v_i\right)$$

הואיל ואנחנו יודעים כי H נילפוטנטית נקבל שעבור n גדול מספיק גם $\mathrm{ad}^n h_1\left(v_0\right) = 0$, והרי $\mathrm{ad}^n h_1\left(v_i\right) \in L_H^{\lambda_i}$, ולכן נקבל כי בהכרח $\mathrm{ad}^n h_1\left(v_i\right) = 0$. ההעתקה $\mathrm{ad} h_1 \mid_{L_H^{\lambda_i}}$ הפיכה כי יש לה ערך עצמי יחיד ־ $\lambda_i\left(h_1\right) \neq 0$. לכן גם $\mathrm{ad}^n h_1$ הפיכה, ולכן $v_i = 0$ לכל i.

לכן נקבל כי $y = v_0 \in H$, ולכן נקבל את השוויון שרצינו. אם כן נקבל (באותו אופן עבור T):

$$H = L^0 \left(h_1\right)$$
$$T = L^0 \left(t_1\right)$$

כעת,

$$\alpha \left(T\right) = \alpha \left(L^0 \left(t_1\right)\right) = L^0 \left(\alpha \left(t_1\right)\right) = L^0 \left(h_1\right) = H$$

■

מסקנה 1.4 תהי L אלגברת לי מעל F. תהי H תת אלגברת קרטן. אזי $\dim H = \mathrm{rank} L$. איבר $x \in H$ הוא גנרי אם ורק אם בפירוק מעל $\overline{F}$

$$L_{\overline{F}} = H_{\overline{F}} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \left(L_H^{\lambda_i}\right)_{\overline{F}}\right)$$

מתקיים $\lambda_i \left(x\right) \neq 0$ לכל i.

הוכחה: בשביל החלק הראשון אפשר להניח כי F סגור אלגברית (כי כל המושגים כאן נשמרים בהרחבת סקלרים). לפי המשפט, ברור שלכל שתי תת אלגבראות קרטן יש את אותו מימד. יהי $x \in L$ גנרי. ראינו כי $L^0 \left(x\right)$ היא תת אלגברת קרטן. לכן

$$\dim H = \dim L^0 \left(x\right) = \mathrm{rank} \left(H\right)$$

נגדיר H' כמו קודם. ראינו בהוכחה הקודמת שאם $x \in H'$ אזי $H = L^0 \left(x\right)$. לכן, $\dim L^0 \left(x\right) = \dim H = \mathrm{rank} \left(H\right)$, כלומר x גנרי. להיפך, נניח כי $x \in H$ גנרי. ראינו כי $L^0 \left(x\right)$ היא תת אלגברת קרטן. H נילפוטנטית, $x \in H$, ולכן $H \subset L^0 \left(x\right)$, אבל H נילפוטנטית מקסימלית (כתת אלגברת קרטן) כלומר $H = L^0 \left(x\right)$. נניח בשלילה כי $\lambda_1 \left(x\right) = 0$ (1 אינדקס שרירותי). מכאן נקבל כי $\mathrm{ad} x \mid_{L_H^{\lambda_1}}$ נילפוטנטי. מההגדרה נקבל כי $L_H^{\lambda_1} \subset L^0 \left(x\right) = H$ - בסתירה לפירוק לסכום ישר. נסיק כי $x \in H'$ כמו שרצינו. ■

1.2 מערכת השורשים באלגברת לי פשוטה למחצה ביחס לתת אלגברת קרטן מתפצלת מעל השדה

החל מכאן נכתוב L^λ במקום L_H^λ.

הגדרה 1.5 נאמר כי תת אלגברת קרטן H של אלגברת לי L מעל שדה F מתפצלת (split) מעל F אם לכל $x \in H$, הערכים העצמיים של $\mathrm{ad}_L x$ נמצאים בשדה F (כלומר $\mathrm{ad}_L x$ ניתן לשילוש מעל F). באותם סימונים כמו קודם, אם $0 \neq \lambda \in H^*$ המקיים $L_H^\lambda \neq 0$, נאמר כי λ הוא שורש (root) של L ביחס לתת האלגברה H. קבוצת השורשים של L ביחס לתת האלגברה H תסומן $R \left(L, H\right)$.

משפט 1.6 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה, ותהי H תת אלגברת קרטן מתפצלת מעל F. נסמן $R = R$ נפרק

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} L^{\alpha} \right)$$

פירוק זה נקרא פירוק קרטן של L ביחס לתת האלגברה H. כל הבאים מתקיימים:

1. לכל $\alpha \in R\left(L, H\right)$ מתקיים $\dim L^{\alpha} = 1$.

2. (א) H תת אלגברה קומוטטיבית.

   (ב) לכל $h \in H$ ולכל $x \in L_H^{\alpha}$ מתקיים $\mathrm{ad}_L h\left(x\right) = \left[h, x\right] = \alpha\left(h\right) \cdot x$.

   (ג) לכל $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$ מתקיים $\left[L^{\alpha}, L^{\beta}\right] \subset L^{\alpha+\beta}$.

   (ד) לכל $\alpha \in R$ גם $-\alpha \in R$.

   (ה) לכל $\alpha \in R$ נקבל $\left[L^{\alpha}, L^{-\alpha}\right] = H_{\alpha}$ ממימד 1 ונוצר על ידי איבר h_{α} עבורו $\alpha\left(h_{\alpha}\right) = 2$.

3. (א) לכל $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$ כך שמתקיים $\alpha + \beta \neq 0$ מתקיים $\kappa_L\left(L^{\alpha}, L^{\beta}\right) = 0$.

   (ב) לכל $\alpha \in R \cup \{0\}$, התבנית $\kappa_L \mid_{L^{\alpha} \times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת. בפרט, התבנית $\kappa_L \mid_{H \times H}$ לא מנוונת.

   (ג) לכל $x, y \in H$ מתקיים

$$\kappa_L\left(x, y\right) = \sum_{\alpha \in R} \alpha\left(x\right) \alpha\left(y\right)$$

4. מתקיים $H^* = \mathrm{Span} R$.

5. לכל $\alpha \in R$ תת המרחב

$$S_{\alpha} = H_{\alpha} \oplus L^{\alpha} \oplus L^{-\alpha}$$

הוא תת אלגברת לי ממימד 3. נבחר $x_{\alpha} \in L^{\alpha}$. אז יש איבר $x_{-\alpha} \in L^{-\alpha}$ יחיד כך שמתקיים $\left[x_{\alpha}, x_{-\alpha}\right] = h_{\alpha}$. נתבונן בהעתקה הלינארית

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{sl}_2 F &\to S_{\alpha} \\ \varphi\left(e\right) &= x_{\alpha} \\ \varphi\left(h\right) &= h_{\alpha} \\ \varphi\left(f\right) &= x_{-\alpha} \end{aligned}$$

ונקבל איזומורפיזם של אלגבראות לי.

הוכחה: ראשית נבדוק מה אנחנו כבר יודעים. את הפירוק שמוצג בתחילת המשפט ראינו כבר, וגם את סעיפים 2ג, 3א ראינו כבר. מכל אלה, ומכך שהנחנו כי L פשוטה למחצה, נקבל כי κ_L לא מנוונת. נניח כי $\alpha \in R$. מסעיף 3א נקבל כי

$$\begin{aligned} \kappa\left(L^{\alpha}, H\right) &= 0 \\ \kappa\left(L^{\alpha}, L^{\beta}\right) &= 0 \, \forall \beta \neq -\alpha \end{aligned}$$

מכאן נקבל כי בהכרח $L^{-\alpha} \neq 0$ - אחרת L^{α} היה מאונך לכל L - זה סעיף 2ד. כמו כן נסיק כי $\kappa\mid_{L^{\alpha}\times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת, בפרט גם עבור $\alpha=0$, שהרי $H=L^{0}$. זה מוכיח גם את 3ב. ראינו כי עבור $x,y\in H$ מתקיים

$$\kappa_{L}\left(x,y\right)=\sum_{\alpha\in R}\dim L^{\alpha}\alpha\left(x\right)\alpha\left(y\right)$$

נניח כי $x\in H$ איבר שעבורו $\alpha\left(x\right)=0$ לכל $\alpha\in R$. אזי אגף ימין הוא 0, כלומר $\kappa_{L}\left(x,y\right)=0$ לכל $y\in H$ - אבל $\kappa_{L}\mid_{H\times H}$ לא מנוונת , ולכן נקבל כי $x=0$ בהכרח. מכאן נקבל את סעיף 4. כעת, יהי $h\in H$. נכתוב את פירוק ז'ורדן־שבליי שלו:

$$h=d+n$$

לכל $\alpha\in R$ ולכל $x\in L^{\alpha}$ נקבל כי

$$d\left(x\right)=\alpha\left(h\right)\cdot x$$

כי $\mathrm{ad}_{L}d$ פועל אלכסונית. כך גם נקבל כי לכל $x\in H$ מתקיים $d\left(x\right)=0$. מכאן נראה כי d הוא אופרטור גזירה על L, כלומר

$$d\left(\left[z,z'\right]\right)=\left[d\left(z\right),z'\right]+\left[z,d\left(z'\right)\right]$$

די להראות את זה עבור $z\in L^{\alpha},z'\in L^{\beta}$ כאשר $\alpha,\beta\in R\cup\left\{0\right\}$. כעת, $\left[z,z'\right]\in L^{\alpha+\beta}$, כלומר

$$\begin{aligned}d\left(\left[z,z'\right]\right)&=\left(\alpha+\beta\right)\left(h\right)\left[z,z'\right]=\left[\alpha\left(h\right)z,z'\right]+\left[z,\beta\left(h\right)z'\right]=\\&=\left[d\left(z\right),z'\right]+\left[z,d\left(z'\right)\right]\end{aligned}$$

■