אלגבראות לי

ⓒ ארזים

24 במרץ 2019

ספרים Lie Algebras - James Humphries ,Envelopping Algebras - Jacques Dixmier.
לפחות בהתחלה יותר הספר הראשון - הוא עובד מעל שדה כלשהו (ולאו דווקא סגור אלגברית).

כנראה יהיה דף תרגיל פעם בשבוע במודל. בסוף הקורס - עבודה שכוללת תרגילים מדפי התרגיל ואולי עוד.

1 מושגים ראשונים

1.1 הגדרות ודוגמאות

הגדרה 1.1 יהי F שדה. יהי L מרחב ווקטורי מעל F. נתונה פעולה $[\cdot,\cdot]:L\times L\to L$ הנקראת **כפל קומוטטור** ומקיימת:

1. $[\cdot,\cdot]$ בי־לינארית מעל F.
2. לכל $x\in L$ מתקיים $[x,x]=0$.
3. לכל $x,y,z\in L$ מתקיים $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ (**זהות יעקובי**).

נאמר כי L (ביחס לפעולה $[\cdot,\cdot]$) היא **אלגברית לי** מעל F.

נשים לב כי כמובן

$$\begin{aligned}[x+y,x+y]&=0\\ [x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]&=0\\ [x,y]&=-[y,x]\end{aligned}$$

כאשר מתקיים $\mathrm{char}\,(F)\neq 2$, תכונה זו שקולה לתכונה 2.
תת מרחב ווקטורי של אלגברת לי L ייקרא תת־אלגברת לי אם הוא סגור ביחס לכפל הקומוטטור.
הומומורפיזם של אלגבראות לי $f:L_1\to L_2$ הוא העתקה לינארית שמקיימת

$$f\left([x,y]\right)=\left[f\left(x\right),f\left(y\right)\right]$$

לכל $x,y\in L$.

בהינתן שתי אלגבראות לי L_1, L_2, הסכום הישר $L_1 \times L_2$ מוגדר כרגיל כמרחב וקטורי, עם

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$$

בסימון חבורי - $L_1 \oplus L_2$.

דוגמאות

1. יהי V מרחב ווקטורי מעל F. נגדיר $[u,v]=0$ לכל $u,v \in V$. במצב כזה נאמר כי V אלגברת לי אבלית. אם L אלגברת לי עם $0 \neq x \in L$, אזי Fx היא תת אלגברת לי אבלית.

2. תהי A אלגברה אסוציאטיבית מעל F. הכפל האסוציאטיבי של A מגדיר על A מבנה של אלגברת לי לפי

$$[x,y] = xy - yx$$

נוודא שזהות יעקובי מתקיימת:

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] &= x[y,z] - [y,z]x + y[z,x] - [z,x]y + z[x,y] - [x,y]z = \\
&= xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - \\
&- zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz = 0
\end{aligned}$$

נסתכל על המקרה הפרטי בו $A = \mathrm{End}_F V$ כאשר V מרחב ווקטורי מעל F, עם הכפל שהוא הרכבת העתקות. הקומוטטור יהיה

$$[T,S] = T \circ S - S \circ T$$

הסימון לאלגברת לי המתקבלת הוא $\mathrm{gl}(V)$. בקואורדינטות, כאשר $A = M_n(F)$ עם כפל הקומוטטור

$$[X,Y] = XY - YX$$

תסומן $\mathrm{gl}_n(F)$ (בכל ההגדרות בסגנון, n ייכתב לעתים כתת־אינדקס ולעתים בתוך הסוגריים). כאן יש תת אלגבראות לי מעניינות:

(א) $\mathcal{B}(n,F)$ - המטריצות המשולשיות העליונות.

(ב) $d(n,F)$ - המטריצות האלכסוניות.

(ג) $n(n,F)$ - המטריצות הנילפוטנטיות (תת מרחב של $\mathcal{V}(n,F)$).

נשים לב כי כמרחבים ווקטוריים מתקיים $\mathcal{V}(n,F) = d(n,F) \oplus n(n,F)$. בנוסף,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{V}(n,F), \mathcal{V}(n,F)] &\subseteq n(n,F) \\
[d(n,F), n(n,F)] &= n(n,F)
\end{aligned}$$

(ד) $\mathrm{sl}(n,F)=\{x\in\mathrm{gl}(n,F)\mid \mathrm{tr}(x)=0\}$. זו תת־אלגברת לי כי לכל $X,Y\in\mathrm{gl}_n(F)$ מתקיים $\mathrm{tr}[X,Y]=\mathrm{tr}(XY-YX)=0$. כמובן $\dim\mathrm{sl}_n(F)=n^2-1$. נסתכל לרגע על $\mathrm{sl}_2(F)=Fe\oplus Ff\oplus Fh$ עם

$$e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

נחשב את הקומוטטורים:

$$[h,e]=he-eh=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=2e$$
$$[h,f]=hf-fh=\begin{pmatrix}0&0\\-2&0\end{pmatrix}=-2f$$
$$[e,f]=ef-fe=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=h$$

באופן כללי, אם L אלגברת לי ממימד סופי n מעל השדה F, נבחר בסיס $x_1,\ldots,x_n$ של L. נכתוב

$$[x_i,x_j]=\sum_{k=1}^{n}c_{i,j,k}x_k$$

עבור $c_{i,j,k}\in F$. אלה נקראים קבועי המבנה של L. אפשר לתרגם את התכונות של הקומוטטור לתכונות שלהם:

$$c_{i,i,k}=0$$

באותה צורה ניתן להגיע לתכונה ארוכה ומסובכת של קבועי המבנה כתוצאה מזהות יעקובי.

3. אלגברת לי הסימפלקטית: נתון V מרחב ווקטורי מעל F, שהמציין שלו אינו 2, ממימד $2n$. תהי $f:V\times V\to F$ תבנית בי־לינארית אנטי־סימטרית ולא מנוונת. אנטי־סימטריה משמע

$$f(v,u)=-f(u,v)$$

חוסר ניוון משמע $u=0$ אם ורק אם לכל $v\in V$ מתקיים $f(u,v)=0$. כעת נגדיר

$$\mathrm{sp}(V,f)=\{T\in\mathrm{gl}(V)\mid f(T(u),v)=-f(u,T(v))\}$$

אם f ברור נשמיט אותו. ברור שזהו תת מרחב של $\mathrm{gl}(V)$, צריך לראות סגירות ביחס לקומוטטור. ניקח $T,S\in\mathrm{sp}(V)$, ואז

$$\begin{aligned}f([T,S]u,v)&=f(T(S(u)),v)-f(S(T(u)),v)=\\&=-f(S(u),T(v))+f(T(u),S(v))=\\&=f(u,S(T(v)))-f(u,T(S(v)))=\\&=f(u,(S\circ T-T\circ S)(v))=\\&=-f(u,(T\circ S-S\circ T)(v))=\\&=-f(u,[T,S]v)\end{aligned}$$

זו נקראת אלגברת לי הסימפלקטית. בקואורדינטות: נבחר בסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ של V. נתבונן במטריצה $J=\left(f\left(v_i,v_j\right)\right)_{i,j\le 2n}$. זו מטריצה אנטי־סימטרית והפיכה. אם ניקח

$$v=\sum_{i=1}^{2n}x_iv_i$$

אזי $[v]_B=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_{2n}\end{pmatrix}$, ומהבי־לינאריות נקבל

$$f\left(v,u\right)=[v]_B^t\,J\,[u]_B$$

וכעת מתקיים, לכל $u,v\in V$,

$$\begin{aligned}T\in\mathrm{sp}\left(V\right) &\iff [T\left(v\right)]_B^t\,J\,[u]_B+[v]_B^t\,J\,[T\left(u\right)]_B=0\\ &\iff [v]_B^t\,[T]_B^t\,J\,[u]_B+[v]_B\,J\,[T]_B\,[u]_B=0\\ &\iff [T]_B^t\,J+J\,[T]_B=0\end{aligned}$$

לכן במונחי מטריצות נכתוב

$$\mathrm{sp}\left(2n,J\right)=\left\{x\in\mathrm{gl}\left(2n,F\right)\mid x^tJ+Jx=0\right\}$$

נשים לב שלכל J_1,J_2 אנטי־סימטריות הפיכות קיימת g המקיימת

$$g^tJ_1g=J_2$$

כלומר J_1,J_2 חופפות. לכן, כמובן, על ידי הצמדה, כל $\mathrm{sp}\left(2n,J\right)$ איזומורפיות, ולכן נבחר את J להיות

$$J=\begin{pmatrix}0&W_n\\-W_n&0\end{pmatrix}$$

$$W_n=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&1\\0&0&\dots&1&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&1&\dots&0&0\\1&0&\dots&0&0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

וכעת נוכל לכתוב

$$\mathrm{sp}\left(2n,F\right)=\left\{X\in\mathrm{gl}\left(2n,F\right)\mid X^t\begin{pmatrix}0&W_n\\-W_n&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&W_n\\-W_n&0\end{pmatrix}X=0\right\}$$

נסמן $X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, כאשר A,B,C,D כולן $n\times n$, וכעת

$$\begin{aligned}X^{t}J+JX&=0\\ \begin{pmatrix}A^{t} & C^{t}\\ B^{t} & D^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & W_{n}\\ -W_{n} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & W_{n}\\ -W_{n} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}&=0\\ \begin{pmatrix}-C^{t}W_{n} & A^{t}W_{n}\\ -D^{t}W_{n} & B^{t}W_{n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}W_{n}C & W_{n}D\\ -W_{n}A & -W_{n}B\end{pmatrix}&=0\end{aligned}$$

מכאן נקבל

$$\begin{aligned}W_{n}C&=C^{t}W_{n}=\left(W_{n}C\right)^{t}\\ W_{n}B&=B^{t}W_{n}=\left(W_{n}B\right)^{t}\\ W_{n}D&=A^{t}W_{n}\end{aligned}$$

מכאן נקבל את המימד:

$$\begin{aligned}\dim_{F}\mathrm{sp}\left(2n,F\right)&=n^{2}+2\left(1+2+3+\cdots+n\right)=\\ &=n^{2}+n\left(n+1\right)=2n^{2}+n\end{aligned}$$

נסמן

$$\mathrm{sp}\left(2n,F\right)=C_{n}$$

כמו כן (לא באמת קשור אבל אם כבר מסמנים משפחות):

$$\mathrm{sl}\left(n+1,F\right)=A_{n}$$

קיימות גם משפחות B_{n},D_{n}, שלא נדבר עליהן כאן בהרחבה, ומעל שדה סגור אלגברית, אלו כל אלגבראות לי הפשוטות (נגדיר עוד מעט).

4. הרחבת סקלרים: נתונה אלגברת לי L מעל שדה F, וניקח $F\subseteq K$ שדה הרחבה. נתבונן בהרחבת הסקלרים

$$L_{K}=L\otimes_{F}K$$

כמרחב ווקטורי מעל K (כפל בסקלר כופל את הקואורדינטה הימנית כרגיל). נגדיר כאן כפל קומוטטור שיהפוך את L_{K} לאלגברת לי מעל K: נגדיר

$$\left[x\otimes t,y\otimes s\right]=\left[x,y\right]\otimes ts$$

ונרחיב לאיבר כללי לפי סכומים. לשם כך, נגדיר

$$\begin{aligned}\varphi:L\times K\times L\times K&\to L\otimes_{F}K\\ \varphi\left(x,t,y,s\right)&=\left[x,y\right]\otimes ts\end{aligned}$$

כמובן שזו העתקה מולטי־לינארית מעל F. לכן, מהתכונה של מכפלה טנזורית של מרחבים ווקטוריים, יש העתקה ווקטורית יחידה

$$\phi:L\otimes_{F}K\otimes_{F}L\otimes_{F}K\to L\otimes_{F}K$$

המקיימת

$$\phi\left(x\otimes t\otimes y\otimes s\right)=[x,y]\otimes ts$$

נזהה את $L\otimes_F K\otimes_F L\otimes_F K\cong\left(L\otimes_F K\right)\otimes_F\left(L\otimes_F K\right)=L_K\otimes_F L_k$, ונוכל כעת להגדיר עבור $a,b\in L_K$:

$$[a,b]=\phi\left(a\otimes b\right)$$

קל לבדוק כי קומוטטור זה בי־לינארי מעל K. נראה כי $[a,a]=0$ לכל $a\in L_k$. נכתוב

$$a=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes t_i$$

ואז נקבל

$$\begin{aligned}[a,a]=\sum_{i,j}\left[x_i,x_j\right]\otimes t_it_j=\sum_{i<j}\left[x_i,x_j\right]\otimes t_it_j+\sum_{i>j}\left[x_i,x_j\right]\otimes t_it_j+\sum_{i=j}\left[x_i,x_j\right]\otimes t_it_j=\\ =\sum_{i<j}\left[x_i,x_j\right]\otimes t_it_j+\sum_{i>j}-\left[x_j,x_i\right]\otimes t_it_j+\sum_{i=j}0\otimes t_it_j=0\end{aligned}$$

את זהות יעקובי די לבדוק על איברים מהצורה $x\otimes 1$ עם $x\in L$, כי אלה פורשים את L_K מעל K, וזה ברור.

1.2 גזירות (Derivations)

תהי L אלגברת לי מעל F. לכל $x\in L$ נתבונן בהעתקה הלינארית

$$\begin{aligned}&\delta_x:L\to L\\ &\delta_x\left(y\right)=[x,y]\end{aligned}$$

נכתוב את זהות יעקובי בעזרת δ_x:

$$\begin{aligned}[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]&=0\\ \delta_x\left([y,z]\right)-\left[y,\delta_x\left(z\right)\right]+\left[z,\delta_x\left(y\right)\right]&=0\\ \delta_x\left([y,z]\right)&=\left[y,\delta_x\left(z\right)\right]+\left[\delta_x\left(y\right),z\right]\end{aligned}$$

זה נראה כמו כלל גזירה!

הגדרה 1.2 העתקה לינארית $\delta:L\to L$ תיקרא **גזירה (Derivation)** אם לכל $y,z\in L$ מתקיים

$$\delta\left([y,z]\right)=\left[\delta\left(y\right),z\right]+\left[y,\delta\left(z\right)\right]$$

כמובן, לכל $x \in L$, ההעתקה δ_x היא העתקת גזירה, ממה שראינו קודם. הסימון המקובל הוא

$$\delta_x = \mathrm{ad}x = \mathrm{ad}\left(x\right)$$

מסמנים $\mathrm{Der}\left(L\right)$ את קבוצת כל הגזירות של L, כאשר חושבים עליה בתור $\mathrm{Der}\left(L\right) \subset \mathrm{gl}\left(L\right)$.

טענה 1.3 (פשוטה) $\mathrm{Der}\left(L\right)$ היא תת־אלגברת לי של $\mathrm{gl}\left(L\right)$.

הוכחה: סכום של גזירות הוא בבירור גזירה, וכך גם כפל בסקלר של גזירה. כל שנותר הוא לראות סגירות לקומוטטור. ניקח שתי גזירות d_1, d_2, נפעיל את $[d_1, d_2]$ על קומוטטור ונוודא את התכונה.

$$\begin{aligned}
[d_1, d_2]\left([y,z]\right) &= \left(d_1 \circ d_2\right)\left([y,z]\right) - \left(d_2 \circ d_1\right)[y,z] = \\
&= d_1\left([d_2\left(y\right), z] + [y, d_2\left(z\right)]\right) - d_2\left([d_1\left(y\right), z] + [y, d_1\left(z\right)]\right) = \\
&= [d_1\left(d_2\left(y\right)\right), z] + \cancel{[d_2\left(y\right), d_1\left(z\right)]} + \cancel{[d_1\left(y\right), d_2\left(z\right)]} + [y, d_1\left(d_2\left(z\right)\right)] - \\
&- \left([d_2\left(d_1\left(y\right)\right), z] + \cancel{[d_1\left(y\right), d_2\left(z\right)]} + \cancel{[d_2\left(y\right), d_1\left(z\right)]} + [y, d_2\left(d_1\left(z\right)\right)]\right) = \\
&= [d_1 d_2 y, z] + [y, d_1 d_2\left(z\right)] - [d_2 d_1\left(y\right), z] - [y, d_2 d_1\left(z\right)] = \\
&= [[d_1, d_2]\left(y\right), z] + [y, [d_1, d_2]\left(z\right)]
\end{aligned}$$

■

טענה 1.4 $\mathrm{ad}\left(L\right) \subset \mathrm{Der}\left(L\right)$ היא תת־אלגברת לי.

הוכחה: בבירור $\mathrm{ad}\left(L\right)$ הוא תת־מרחב ווקטורי, שכן בבירור

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}\left(x+y\right) &= \mathrm{ad}x + \mathrm{ad}y \\
\mathrm{ad}\left(\lambda x\right) &= \lambda \mathrm{ad}x
\end{aligned}$$

נותר להראות סגירות ביחס לכפל קומוטטור.

$$\begin{aligned}
[\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y]\left(z\right) &= \left(\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}y\right)\left(z\right) - \left(\mathrm{ad}y \circ \mathrm{ad}x\right)\left(z\right) = \\
&= [x, [y,z]] - [y, [x,z]] = \\
&= [x, [y,z]] + [y, [z,x]] \stackrel{*}{=} \\
&= -[z, [x,y]] = [[x,y], z] = \mathrm{ad}\left([x,y]\right)\left(z\right)
\end{aligned}$$

המעבר המסומן בכוכבית הוא מזהות יעקובי. לכן נקבל

$$[\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y] = \mathrm{ad}[x,y] \in \mathrm{ad}\left(L\right)$$

■

מסקנה 1.5 ההעתקה $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Der}\left(L\right) \subset \mathrm{gl}\left(L\right)$ היא הומומורפיזם של אלגבראות לי.

הגדרה 1.6 **הצגה** של אלגברת לי L מעל F במרחב וקטורי V מעל F היא הומומורפיזם של אלגבראות לי

$$\pi : L \to \mathrm{gl}\left(V\right)$$

לכן, ad היא הצגה של L במרחב L, ונקראת **ההצגה הצמודה** של L (Adjoint Representation).

הגדרה 1.7 איברי $\mathrm{ad}\left(L\right)$ נקראים **גזירות פנימיות (Inner Derivations)** של L. איברי $\mathrm{Der}\left(L\right)\backslash\mathrm{ad}\left(L\right)$ נקראות **גזירות חיצוניות (Outer Derivations).**

1.3 חבורות לי לינאריות

נצטמצם למצב בו $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. נתבונן בחבורה $\mathrm{GL}_n\left(F\right)$ - זו חבורה טופולוגית ואפילו יריעה.

$\mathrm{GL}_n\left(F\right) \leftrightarrow \mathrm{gl}_n(\mathrm{F})$ נתבונן בעקום החלוק (פונקציה גזירה אינסוף פעמים) $M : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n\left(F\right)$ ונניח כי $M\left(0\right) = I_n$. כעת

$$M\left(t\right) = \begin{pmatrix} M_{1,1}\left(t\right) & \dots & M_{1,n}\left(t\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1}\left(t\right) & \dots & M_{n,n}\left(t\right) \end{pmatrix}$$

כעת נוכל להסתכל על

$$M'\left(t\right) = \left(M'_{i,j}\left(t\right)\right)_{i,j}$$

מתקיים

$$\left(M'_{i,j}\left(0\right)\right)_{i,j} = \left(\lim_{t\to 0}\frac{M_{i,j}\left(t\right) - \delta_{i,j}}{t}\right)_{i,j} \in \mathrm{gl}_n\left(F\right)$$

ולכן $M'\left(0\right) = A \in \mathrm{gl}_n\left(F\right)$. להיפך, תהי $A \in \mathrm{gl}_n\left(F\right)$ ונגדיר

$$M\left(t\right) = \exp\left(tA\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m A^m}{m!}$$

קל לבדוק שמתקיים

$$M\left(t+s\right) = M\left(t\right)M\left(s\right)$$

בפרט,

$$M\left(t\right)M\left(-t\right) = M\left(0\right) = I_n$$

כלומר $M\left(t\right) \in \mathrm{GL}_n\left(F\right)$. כעת מתקיים

$$M'\left(t\right) = A\exp\left(tA\right)$$

ולכן

$$M'(0) = A$$

$\mathrm{SP}_m(F) \iff \mathrm{sp}_m(F)$ תהי S מטריצה אנטי־סימטרית הפיכה מתוך $\mathrm{GL}_m(F)$ ($m = 2n$). החבורה הסימפלקטית המתאימה למטריצה S היא

$$\mathrm{U}(S) = \mathrm{SP}_m(F) = \left\{ g \in GL_m(F) \mid g^t S g = S \right\}$$

בלשון של התבנית $f(v,u) = v^t S u$, נקבל

$$g^t S g = S f(gv, gu) = f(v,u)$$

לכל $u, v \in F^m$. נניח כי $M : \mathbb{R} \to \mathrm{U}(S)$ עקום חלק המקיים $M(0) = I_n$. אזי מתקיים

$$M^t(x) S M(x) = S$$

וזאת לכל $x \in \mathbb{R}$. נגזור את השוויון:

$$M'^t(x) S M(x) + M^t(x) S M'(x) = 0$$

נציב $x = 0$ ונקבל

$$M'^t(0) S + S M'(0) = 0$$

ומכאן נקבל כי $M'(0) \in \mathrm{sp}(2n, S) = \mathrm{u}(S)$ (הסימונים U, u ישמשו אותנו רק בדוגמאות האלה). נראה גם את ההיפך: נניח כי $A \in \mathrm{u}(S)$, כלומר

$$A^t S + S A = 0$$

נתבונן בעקום

$$M(t) = \exp(tA)$$

נרצה להראות כי

$$M(t) \in \mathrm{U}(S)$$

נתבונן בפונקציה

$$f(x) = M^t(x) S M(x)$$

ונרצה להראות שהיא קבועה. נגזור:

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(xA^t\right) S \exp(xA) \\ f'(x) &= \exp\left(xA^t\right) A^t S \exp(xA) + \exp\left(xA^t\right) S \exp(xA) A = \\ &= \exp\left(xA^t\right) \left(A^t S + SA\right) \exp(xA) = 0 \end{aligned}$$

שכן $A \in \mathrm{u}(S)$. לכן f קבועה, ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = f(0) = S$. לכן

$$\exp(xA) \in \mathrm{U}(S)$$

ידוע לנו שמתקיים $\mathrm{sl}_n(F) \leftrightarrow \mathrm{SL}_n(F)$

$$\det(\exp(xA)) = e^{x\mathrm{tr}(A)}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. לכן,

$$\det(\exp(xA)) = 1 \iff e^{x\mathrm{tr}(A)} = 1 \iff \mathrm{tr}(A) = 0$$

אם כן, קיבלנו כי

$$A \in \mathrm{sl}_n(F) \iff \exp(tA) \in \mathrm{SL}_n(F) = \{X \in \mathrm{GL}_n(F) \mid \det X = 1\}$$

הקומוטטור עד כאן עוד לא מצאנו את הקומוטטור. לשם כך, ניתן מעט תכונות טכניות.

למה 1.8 אם $X \in M_n(F)$ אזי הטור

$$\exp(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}$$

מתכנס במידה שווה בקבוצות חסומות (בתוך $M_n(F)$).

הוכחה: נגדיר

$$||X|| = \max_{i,j \leq n} |X_{i,j}|$$

מתקיים

$$||X \cdot Y|| \leq n\,||X||\,||Y||$$

ולכן

$$||X^m|| \leq (n\,||X||)^m$$

ומכאן

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left|\left|\frac{X^m}{m!}\right|\right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n\,||X||)^m}{m!} = e^{n||X||}$$

ולכן קיבלנו התכנסות במידה שווה על $\{X \in M_n(F) \mid ||X|| \leq C\}$. ∎

למה 1.9 יש סביבה של I_n, שנסמנה $U_0 \subset \mathrm{GL}_n(F)$, כך שעליה מוגדר $\log U$, המקיים

$$\exp \log U = U$$

לכל $U \in U_0$.

הוכחה: ניקח איבר $U = I_n + Y$. נגדיר

$$\log(I_n + Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} Y^m}{m}$$

תנאי ההתכנסות כאן ייתקבל על ידי הערכת הנורמה כמו קודם:

$$\left|\left|\frac{(-1)^{m+1} Y^m}{m}\right|\right| = \frac{1}{m} ||Y^m|| \leq \frac{||Y||^m}{m}$$

נדרוש שמתקיים $||Y|| < \frac{1}{2n}$ (חסם קבוע), ונקבל שהאי־שוויון למעלה ממשיך בתור

$$\leq \frac{1}{m2^m}$$

והטור של האיברים הללו מתכנס (ואפילו במידה שווה). מכאן בעזרת חישוב פורמלי נקבל שהפונקציה שהגדרנו הופכית לאקספוננט (אפשר להציב כי מציבים טור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה). אם כן, נגדיר

$$U_0 = \left\{ U \in \mathrm{GL}_n(F) \mid ||U - I_n|| < \frac{1}{2n} \right\}$$

ונקבל את שרצינו. ∎

כעת, עבור $t < \varepsilon_0$ קטן דיו, נקבל שמתקיים

$$\exp(tX)\exp(tY) \in U_0$$

שכן מתקיים

$$\lim_{t\to 0} \exp(tA) = I_n$$

לכל A. אם כן, נכתוב

$$\exp(tX)\exp(tY) = I_n + Z(t)$$

ונקבל $||Z(t)|| < \frac{1}{2n}$. מתקיים

$$Z(t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m X^m}{m!}\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r Y^r}{r!}\right) - I_n = \sum_{m+r\geq 1} \frac{t^{m+r}}{m!r!} X^m Y^r$$

מצד שני, נוכל לכתוב

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(\log(I_n + Z(t)))$$

מפאת חוסר זמן נכתוב את התוצאה, שקל לוודא אותה:

$$\begin{aligned}\log(I_n + Z(t)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (Z(t))^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\sum_{m+r\geq 1} \frac{t^{m+r}}{m!r!} X^m Y^r\right)^k = \\ &= tF_1(X,Y) + t^2 F_2(X,Y) + \dots\end{aligned}$$

כלומר נקבל

$$\exp\left(tX\right)\exp\left(ty\right)=\exp\left(tF_{1}\left(X,Y\right)+t^{2}F_{2}\left(X,Y\right)+\ldots\right)$$

נגור לפי t ונציב $t=0$, ונקבל

$$X+Y=F_{1}\left(X,Y\right)$$

באותה צורה, על ידי גזירה פעמיים והצבת 0 נקבל

$$F_{2}\left(X,Y\right)=\frac{1}{2}\left[X,Y\right]$$

בפעם הבאה נמשיך מעט עם זה, ונראה שאם $G\subset\mathrm{GL}_{n}\left(F\right)$ תת חבורה סגורה (שאז אפשר להראות עליה מבנה של אלגברת לי), ונתבונן בקבוצה

$$L=\left\{ X\in\mathrm{gl}_{n}\left(F\right)\mid\forall t\in\mathbb{R}.\exp\left(tX\right)\in G\right\}$$

נקבל אלגברת לי מעל $\mathbb{R}$.