סיכום משפטים וטענות מבוא להסתברות

26 ביוני 2017

1 מרחבי הסתברות ומאורעות

הכל חומר של תיכון, תתמודדו.

2 הסתברות מותנה ואי־תלות

2.1 הסתברות מותנה

הגדרה יהי מרחב הסתברות $(\Omega, \Pr)$ ומאורע בעל הסתברות חיובית $B \subseteq \Omega$, $\Pr(B) > 0$.
מרחב ההסתברות המותנה $(\Omega, \Pr(\cdot|B))$ מוגדר לכל $\omega \in \Omega$ ע"י:

$$\Pr(\omega|B) = \begin{cases} \frac{\Pr(\omega)}{\Pr(B)} & \omega \in B \\ 0 & \omega \notin B \end{cases}$$

לכל מאורע $A \subseteq \Omega$ מתקיים ש־

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

2.2 נוסחאת ההסתברות השלמה

תהי $B_1, B_2 ... B_n$ חלוקה של מרחב של מרחב המדגם למאורעות זרים בזוגות בעלי הסתברות חיובית.
אזי לכל מאורע $A \subseteq \Omega$ מתקיים:

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A|B_i) \Pr(B_i)$$

2.3 חוק בייז

יהי צמד מאורעות A, B במרחב הסתברות (Ω, P) בעלי הסתברות חיובית.
אזי:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

2.4 אי תלות

הגדרה מאורעות A, B הם בלתי תלויים אם:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

אי תלות מותנה מאורעות A, B הם בלתי תלוים בהינתן C אם:

$$\Pr(A \cap B|C) = \Pr(A|C) \cdot \Pr(B|C)$$

משפט יהי מרחב הסתברות ו־3 מאורעות A, B, C בלתי תלוים, ו־$\Pr(C) > 0$. אזי A, B ב"ת בהינתן C.

אי תלות של משתנים מקריים מ"מ X, Y הם ב"ת אמ"מ לכל $k, l \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\Pr(X = k, Y = l) = \Pr(X = k) \cdot \Pr(Y = l)$$

3 משתנים מקריים

3.1 משתנה גאומטרי

הגדרה מבצעים סדרה של ניסוים ב"ת כך שכל ניסוי מצליח בסיכוי pונכשל בסיכוי $1 - p$.
נגדיר Xסך כל הניסוים עד ההצלחה הראשונה.
אז לכל k:

$$\Pr(X = k) = (1 - p)^{(k-1)} \cdot p$$

נסמן $X \sim G(p)$
תוחלת - $E[X] = \frac{1}{p}$
שונות - $V[X] = \frac{1-p}{p^2}$

3.2 משתנה בינומי

הגדרה מבצעים סדרה של ניסוים ב"ת כך שכל ניסוי מצליח בסיכוי p ונכשל בסיכוי $1 - p$.
נגדיר X מספר ההצלחות.
אז לכל k:

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}$$

נסמן $X \sim Bin(n, p)$
תוחלת - $E[X] = np$
שונות - $V[X] = np(1 - p)$

למה - חיבור של מ"מ בינומיים יהיה צמד מ"מ פואסוניים ב"ת $X_1 \sim Bin(n, p)$, $X_2 \sim Bin(m, p)$.
אזי $X_1 + X_2 \sim Bin(n + m, p)$

3.3 משתנה היפר־גאומטרי

הגדרה תהי קבוצת עצמים בגודל N, $D \leq N$ מתוכם מיוחדים. דוגמים ללא החזרה n עצמים מתוך הקבוצה.
נסמן X מספר העצמים המיוחדים שבחרנו.
אז לכל k:

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

נסמן $X \sim H(N, D, n)$

3.4 משתנה מקרי פואסוני

הגדרה מ"מ פואסוני X הוא מ"מ המקבל ערכים ב־$\mathbb{N}$ והתפלגותו נתונה ע"י:

$$\Pr(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad , \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

נסמן משתנה מקרי זה ב־$X\sim P(\lambda)$.
הוא מתאר את הסבירות לאירועים שמתרחשים בממוצע בקצב קבוע.
תוחלתו ושונותו ־ λ

משפט ־ התכנסות סדרת מ"מ בינומיים למ"מ פואסוני יהיו סדרת מ"מ $X_1,X_2...$ כך ש־$X_n\sim Bin(n,p_n)$.
נתון כי λ קבוע כלשהו כך ש־$n\cdot P_n\to\lambda$.
אזי לכל קבוע k מתקיים ש:

$$Pr(X_n=k)\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

למה ־ חיבור של מ"מ פואסוניים יהיה צמד מ"מ פואסוניים ב"ת $X_1\sim P(\lambda_1)$, $X_2\sim P(\lambda_2)$.
אזי $X_1+X_2\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

3.5 משתנה מקרי דו מימדי והתפלגות משותפת

הגדרה עבור מ"מ X,Y נגדיר משתנה מקרי חדש דו מימדי:

$$(X,Y)\,:\,\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{R}^2$$

כאשר פונקצייה ההתפלגות המשותפת מוגדרת לכל $x,y\in\mathbb{R}$ ע"י:

$$\Pr(X=x,Y=y)=\Pr(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$$

4 תוחלת ושונות

4.1 תוחלת

הגדרה יהי מ"מ X המוגדר על מרחב הסתברות $(\Omega,\Pr)$. התוחלת של X היא:

$$E[X]=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\Pr(\omega)$$

הערה ־ התוחלת מוגדרת אך ורק אם:

$$\sum_{\omega\in\Omega}|X(\omega)|\Pr(\omega)<\infty$$

משפט יהי מ"מ X בעל תוחלת. אזי:

$$E[X]=\sum_k\Pr(X=k)k$$

לינארית התוחלת יהיו X,Y מ"מ בעלי תוחלת וקבוע $c \in \mathbb{R}$. אזי:

$$E[cX] = c \cdot E[X]$$

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

משפט ־ תוחלת של מכפלה ופונקציה של מ"מ יהי X מ"מ בעל תוחלת ותהי פונקציה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. אזי:

$$E[g(X)] = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega)) \cdot \Pr(\omega) = \sum_k g(k) \Pr(X = k)$$

הגדרה ־ מ"מ בלתי מתואמים יהיו צמד מ"מ בעלי תוחלת X,Y שתוחלת המכפלה שלהם מוגדרת היטב.
המ"מ נקראים בלתי מתואמים אם:

$$E[X] \cdot E[Y] = E[XY]$$

משפט ־ מ"מ בלתי מתואמים אם X,Y בעלי תוחלת סופית וב"ת, אזי הם בלתי מתואמים.

4.2 שונות ושונות משותפת

הגדרה ־ שונות יהי X מ"מ כך ש־$E[X^2] < \infty$. השונות של X היא:

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X]^2)$$

משפט ־ שונות של קבוע יהי X מ"מ כך ש־$\forall \omega \in \Omega.\, X(\omega) = c$.
אזי $V[X] = 0$

משפט יהי X מ"מ בעל מומנט שני סופי ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$.
אזי

$$V[aX + b] = a^2 V[X]$$

הגדרה ־ שונות משותפת יהי צמד מ"מ כך שהתוחלת שלהם ושל מכפלתם מוגדרת היטב וסופית. השונות המשותפת שלהם היא:

$$Cov(X,Y) = E((X - E[X])(Y - E[Y])) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

הערה ־ $Cov(X,X) = V[X]$

משפט ־ תכונות של שונות משותפת

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$$

$$Cov(aX + b, Y) = aCov(Y,X)$$

$$Cov(X + Z, Y) = Cov(X,Y) + Cov(Z,Y)$$

שונות של סכום מ"מ יהיו $n \in \mathbb{N}$ משתנים מקריים $(X_i)_{i=1}^n$ בעלי שונות ונניח שהשונות המשותפת של כל צמד מוגדרת היטב. אזי:

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + \sum_{i\neq j} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)$$

4.3 תוחלת ושונות מותנה

הגדרות תוחלת מותנה

$$E[X|A] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot \Pr(\omega|A) = \sum_k k\cdot \Pr(X=k|A)$$

שונות מותנה

$$V[X|A] = E[(X - E[X|A])^2|A] = E[X^2|A] - (E[X|A]^2$$

התנייה במ"מ

$$E[X|Y](\omega) = E[X|Y = Y(\omega)]$$

משפט התוחלת השלמה יהיו X, Y מ"מ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות, ותוחלת X מוגדרת וסופית. אז מתקיים:

$$E[E[X|Y]] = E[X]$$

משפט השונות השלמה יהיו X, Y מ"מ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות, ושונות X מוגדרת וסופית. אז מתקיים:

$$V[X] = E[V[X|Y]] + V[E[X|Y]$$

טענות נוספות יהיו X, Y מ"מ מוגדרים על אותו מרחב הסתברות ו־g פונקציה ממשית. אזי:

$$E[X\cdot g(Y)|Y] = g(Y)\cdot E[X|Y]$$

יהי N מ"מ שמקבל ערכים טבעיים ויהיו $(X_i)_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת (גם ב־N) ושווי התפלגות. אזי:

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]\cdot E[X_i]$$

5 חסמים על הסתברויות

5.1 אי שיוויון מרקוב

יהי X מ"מ או שלילי, אזי עבור כל $\alpha > 0$ מתקיים:

$$\Pr(X\geq\alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

5.2 אי שיוויו צ'בישב

יהי X מ"מ ו־$\alpha > 0$. אזי:

$$\Pr(|X - E[X]| \geq \alpha) \leq \frac{V[X]}{\alpha^2}$$

5.3 אי שיוויון צ'בישב החד צדדי

יהי X מ"מ ו־$\alpha > 0$. אזי:

$$\Pr(X - E[X] \geq \alpha) \leq \frac{V[X]}{V[X] + \alpha^2}$$

$$\Pr(X - E[X] \leq -\alpha) \leq \frac{V[X]}{V[X] + \alpha^2}$$

6 גבולות של סכומי מ"מ

6.1 החוק החלש של המספרים הגדולים

יהיו $X_1 ... X_n$ מ"מ בלתי מתואמים, שווי הסתברות, עם תוחלת μ ושונות σ^2.
נסמן $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. אזי לכל $c > 0$ מתקיים:

$$\Pr(|\bar{X} - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{nc^2}$$

הערה ־ לכל $c > 0$, כאשר n שואף לאינסוף נקבל:

$$\frac{\sigma^2}{nc^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

6.2 משפט הגבול המרכזי (CLT)

יהיו $X_1 ... X_n$ מ"מ ב"ת שווי הסתברות הם תוחלת μ ושונות σ^2. נסמן $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. אזי:

$$\Pr\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq b\right) \sim \phi(b)$$

בפרט:

$$\Pr\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq b\right) \sim \phi(b) - \phi(\alpha)$$

כאשר:

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} dx$$

תכונות ϕ:

$$\phi(z)\xrightarrow[z\to\infty]{} 1$$

$$\phi(z)\xrightarrow[z\to-\infty]{} 0$$

$$\phi(z) = 1 - \phi(-z)$$

7 שרשאות מרקוב

7.1 הגדרות

שרשרת מרקוב היא (S, μ, P), כאשר:

- S ־ קבוצת המצבים בשרשרת
- P ־ מטריצת התפלגויות, כאשר במקום ה־i, j נמצאת ההתפלגות לעבור ממצב i למצב j. המטריצה מקיימת שסכום כל שורה 1.
- μ ־ ההתפלגות ההתחלתית, וקטור של כל המצבים, סכומו 1.

נגדיר מ"מ X_t להיות המצב בו נהיה בצעד ה־t.
התפלגות בזמן t מסומנת μ_t ומקיימת:

$$\mu_t(i) = P(X_t = i) \qquad \mu_t = \mu_{t-1}P \qquad \mu_t = \mu P^t$$

התפלגות סטציונרית: $\pi P = \pi$.

7.2 אי פריקות

הגדרה שרשרת מרקוב (S, μ, P) נקראת אי פריקה אם לכל $x, y \in S$ קיים זמן tכך ש:

$$P^t(x, y) = P(X_t = y|X_0 = x) > 0$$

כלומר ־ מכל מצב אפשר להגיע לכל מצב אחר תוך זמן כלשהו.

משפט לכל שרשרת מרקוב סופית ואי פריקה יש התפלגות סטציונרית יחידה.

הגדרה זמן הפגיעה במצב $x \in S$ הוא מ"מ:

$$\tau_x = min\{t \geq 0|X_t = x\}$$

$$\tau_x^+ = min\{t \geq 1|X_t = x\}$$

טענה בשרשרת סופית ואי פריקה, לכל $x, y \in S$ מתקיים $E[T_y^+|X_0 = x] < \infty$.

משפט לשרשרת מרקוב סופית ואי פריקה יש התפלגות שציונרית π על מרחב המצבים S כך ש־ $\forall x \in S.\ \pi(x) > 0$

מסקנה אם יש התפלגות סטציונרית יחידה, אז:

$$\forall z.\ \pi(z) = \frac{1}{E[\tau_z^+|X_0 = z]}$$

7.2.1 הרמוניות

הגדרה פוננקיה $f : S \to \mathbb{R}$ תקרא הרמונית אם מתקיים:

$$f(x) = \sum_{y \in S} P(x,y) f(y)$$

טענה בשרשרת מרקוב סופית וי פריקה כל פונקציה הרמונית היא פונקציה קבועה.

הגדרה עבור $x \in S$, נסמן:

$$t(x) = \{t \geq 1 | P^t(x,x) > o\} \subseteq \mathbb{N}$$

בהניתן שרשרת מרקוב ומצב $x \in S$, המחזור של הוא $gcd(T(x))$. אם $T(x) = \phi$ לא נגדיר את המחזור.

טענה אם שרשרת אי פריק, אז מחזור של כל שני מצבים זהה.

7.2.2 הילוך מקרי על גרף סופי קשר

הגדרה בשרשרת אי פריקה נאמר שהמחזור של השרשרת הוא kבאחד מהמצבים. אם המחזור הוא 1 נאמר שאין מחזור.

טענהכ בגרף קשיר המחזור הוא 1 או 2, והוא 2 אמ"מ הגרף דו צדדי.

משפט תהי (S,P) שרשרת מרקוב סופית ואי פריקה וחסרת מחזור, אז לכל נקודת התחלה מתקיים:

$$\forall y \in S. \qquad P^t(x,y) \xrightarrow[t \to \infty]{} \pi(y)$$

(במילים אחרות כל שורותיה של $P^t vi$ π.

מסקנה לכל התפלגות התחלתית μ

$$P(X_t = y) \xrightarrow[t \to \infty]{} \pi(y)$$

הגדרה מצב $x \in S$ יקרא א־מחזורי אם קיים t_0 כך שלכל $t \geq t_0$ מתקיים $P^t(x,x) > 0$.

טענה מחזור של $x \in S$ הוא 1 אמ"מ הוא א־מחזורי.

מסקנה אם שרשרת סופית, אי פריקה, וחסרת מחזור אז קיים T_0 כך שלכל $t \geq T_0$ מתקיים $\forall x,y.\ P^t(x,y) > 0$
או: קיים T_0 כך שלכל $t \geq T_0$ המטריצה P^t חיובית.

משפט תהי P שרשרת מרקוב סופית, אי פריקה, ובעלת מחזור 1, ותהי π התפלגות סטציונרית על מחרב המצבים S.
אז לכל זוג מצבים $x,y \in S$ מתקיים:

$$p^t(x,y) \xrightarrow[t \to \infty]{} \pi(y)$$

מסקנה לכל התפלגות התחלתית מתקיים:

$$P(X_t = y) \xrightarrow[t \to \infty]{} \pi(y)$$