

מבוא להסתברות

© ארזים

1 במאי 2016

1 משתנה מקרי פואסוני

סימון: $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, λ פרמטר שמתאר קצב.

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

תרגיל X מספר המכוניות שנכנסות לצומת ארלוזורוב-נמיר בשעה. X מתפלג פואסונית עם פרמטר λ . כל מכונית שנכנסת לצומת פונה ימינה בסיכוי p , או שמאלה בסיכוי $1-p$, באופן בלתי-תלוי ברכבים האחרים. X_R - מספר המכוניות שפונות ימינה בשעה. X_L - מספר המכוניות שפונות שמאלה בשעה.

1. כיצד מתפלגים X_R, X_L ?

2. האם X_R, X_L תלויים? (פיצול פואסונים)

3. האם X_R, X_L תלויים בהינתן $X = n$?

פתרון

1. $\text{Supp}(X_R) = \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_R = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_R = k | X = n) \cdot \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X_R = k | X = n) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^n}{(n-k)!} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-p)^m}{m!} \lambda^{m+k} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^m}{m!} = \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

כלומר, $X_R \sim \text{Pois}(\lambda p)$, ועל ידי הצבה נקבל $X_L \sim \text{Pois}(\lambda(1-p))$.

2. המשתנים בלתי-תלויים. נוכיח זאת: עבור r, l שלמים אי שליליים

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_R = r, X_L = l) &= \mathbb{P}(X_R = r, X_L = l \mid X = r + l) \cdot \mathbb{P}(X = r + l) = \\ &= \binom{r+l}{r} \cdot p^r (1-p)^l \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{r+l}}{(r+l)!} = \\ &= \frac{(r+l)! p^r (1-p)^l e^{-\lambda} \lambda^r \lambda^l}{r! \cdot l! \cdot (r+l)!} = \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^r}{r!} \cdot e^{-\lambda(1-p)} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^l}{l!} = \mathbb{P}(X_R = r) \cdot \mathbb{P}(X_L = l) \end{aligned}$$

3. אם נתון $X = n$, אזי $X_R + X_L = n$ ולכן הם תלויים לינארית. לדוגמא:

$$0 = \mathbb{P}(X_R = n, X_L = n \mid X = n) \neq \mathbb{P}(X_R = n \mid X = n) \cdot \mathbb{P}(X_L = n \mid X = n)$$

2 חיבוריות של משתנים מקריים

1. אם $X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Pois}(\lambda_2)$ והם בלתי-תלויים אזי $X_1 + X_2 \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2. אם $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p)$, $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p)$ והם בלתי-תלויים אזי $X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$.

3 תוחלת

יהי X משתנה מקרי על (Ω, \mathbb{P}) , אזי התוחלת שלו היא

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega) = \sum_{k \in \text{Supp}(X)} \mathbb{P}(X = k) \cdot k$$

נסמן

$$I = \sum_{0 < k \in \text{Supp}(X)} \mathbb{P}(X = k) \cdot k$$

$$II = \sum_{0 > k \in \text{Supp}(X)} \mathbb{P}(X = k) \cdot k$$

אם $I = \infty$, $II = -\infty$ אזי התוחלת לא מוגדרת.

אם $I = \infty$, אזי התוחלת היא ∞ , $II > -\infty$.

אם $I < \infty$, אזי התוחלת היא $-\infty$, $II = -\infty$.

אם $I < \infty$, אזי התוחלת סופית, $II > -\infty$.

התוחלת היא לינארית: יהיו X, Y משתנים מקריים, ויהי c קבוע.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X + Y] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \\ \mathbb{E}[cX] &= c\mathbb{E}[X]\end{aligned}$$

תרגיל בוחרים קוד באורך 10 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מתוך הספרות 0 עד 9, באופן בלתי תלוי ביתר הספרות. X הוא מספר הרצפים של 11 בקוד. חשבו את $\mathbb{E}[X]$.

פתרון ניתן לחשב את התפלגות X ומתוכה את התוחלת שלו, אבל זה מסובך. במקום זאת, נפרק את X לסכום של משתנים מקריים ונשתמש בלינאריות. נגדיר X_i אינדיקטורים של המאורעות בהם במקום i מתחיל רצף של 11, עבור $i = 1, \dots, 9$. נשים לב כי

$$\sum_{i=1}^9 X_i = X$$

מלינאריות,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^9 X_i\right] = \sum_{i=1}^9 \mathbb{E}[X_i] = 9 \cdot \mathbb{E}[X_1] = 9 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{100}$$

תרגיל מטילים n מטבעות הוגנים, שעל הצדדים שלהם כתוב 0,1. X_i - תוצאת ההטלה במטבע במקום i . לאחר ההטלה מערבבים את סדר המטבעות, כך שכל סידור מתקבל בהסתברות שווה. Y_i - התוצאה במקום i אחרי הערבוב.

$$\begin{aligned}X &= \sum_{i=1}^n X_i \\ Z_i &= 1_{\{X_i=Y_i\}} \\ Z &= \sum_{i=1}^n Z_i\end{aligned}$$

1. $\mathbb{P}(Y_i = 1) = ?$

2. $\mathbb{P}(Y_i = 1 \mid X_i = 1) = ?$

3. $\mathbb{P}(Z_i = 1) = ?$

4. $\mathbb{E}[Z] = ?$

5. $\mathbb{P}(Z = n \mid X = k) = ?$

6. $\mathbb{P}(Z = n) = ?$

7. אם $n = 15$, $\mathbb{P}(Z = 0) = ?$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z = 0) = ?$

פתרון

1. $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$, משיקולי סימטריה. לכל מטבע במקום i יש סיכוי שווה ליפול על 0 או על 1 לפני הערבוב. בגלל שכל המטבעות הוגנים, אחרי הערבוב נקבל מטבע במקום i שסיכויו ליפול על 0 או על 1 שווה.

2. נחשב מפורשות: נגדיר $A_{j \rightarrow i}$ - המאורע בו המטבע במקום j עובר למקום i .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_i = 1 | X_i = 1) &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(Y_i = 1 | X_i = 1, A_{j \rightarrow i}) \cdot \mathbb{P}(A_{j \rightarrow i} | X_i = 1) = \\ &= \sum_{j \neq i} \mathbb{P}(Y_i = 1 | X_i = 1, A_{j \rightarrow i}) \cdot \mathbb{P}(A_{j \rightarrow i}) + \mathbb{P}(Y_i = 1 | X_i = 1, A_{i \rightarrow i}) \cdot \mathbb{P}(A_{i \rightarrow i}) = \\ &= (n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. נשתמש בסעיף הקודם ונתנה על X_i :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_i = 1) &= \mathbb{P}(Z_i = 1 | X_i = 1) \cdot \mathbb{P}(X_i = 1) + \mathbb{P}(Z_i = 1 | X_i = 0) \cdot \mathbb{P}(X_i = 0) = \\ &= \mathbb{P}(Y_i = 1 | X_i = 1) \cdot \mathbb{P}(X_i = 1) + \mathbb{P}(Y_i = 0 | X_i = 0) \cdot \mathbb{P}(X_i = 0) = \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

4.

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n Z_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Z_i] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{n+1}{2n} \cdot 1 + 0 \cdot \frac{n-1}{2n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{n+1}{2n} = n \cdot \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

5. נתון שיש k פעמים 1 וכן $n-k$ פעמים 0. שואלים מה הסיכוי שכל הערכים בכל המקומות יישמרו לאחר הערבוב:

$$\mathbb{P}(Z = n | X = k) = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

6. נדלג - עמוד 79 בחוברת התרגולים.

7. בכדי שיתקיים $Z = 0$ צריך שכל המקומות בהם היה 0 יחזיקו 1 אחרי הערבוב ולהיפך. כאשר יש מספר אי זוגי של מטבעות, זה לא אפשרי, כי חייב להיות מספר שווה של אפסים ואחדות.

8. עבור n אי זוגי, $\mathbb{P}(Z = 0) = 0$, לפי הסעיף הקודם. עבור n זוגי:

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}\left(Z = 0 | X = \frac{n}{2}\right) \cdot \mathbb{P}\left(X = \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{\binom{n}{\frac{n}{2}}} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$