מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

10 באפריל 2016

1 משתנים מקריים דו־מימדיים

עבור X,Y משתנים מקריים כלשהם נגדיר משתנה מקרי חדש (X,Y), כאשר

$$(X,Y):\Omega_X\times\Omega_Y\to\mathbb{R}^2$$

פונקציית ההסתברות של (X,Y) היא

$$\mathbb{P}\left(X=k,Y=l\right)=\mathbb{P}\left(\left(\omega_1,\omega_2\right)\in\Omega_X\times\Omega_Y:X\left(\omega_1\right)=k,Y\left(\omega_2\right)=l\right)$$

וזאת עבור כל $k\in\operatorname{supp}\left(X\right),l\in\operatorname{supp}\left(Y\right)$.

<u>תרגיל:</u> מטילים צמד קוביות, לבנה ושחורה. X ־ תוצאת הקובייה הלבנה. Y ־ התוצאה המקסימלית מבין השתיים.

מצאו את ההתפגויות השוליות של X,Y ואת ההתפלגות המשותפת שלהם.

<u>פתרון:</u> בכדי להציג את ההתפלגות המשותפת ניתן להשתמש בטבלה או בנוסחה עבור כל הערכים שבתומך.

Y/X	1	2	3	4	5	6	התפלגות X
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{6}$
התפלגות Y	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

אם רוצים להציג את הפתרון כנוסחה:

$$\mathbb{P}\left(X=k,Y=l\right)=\mathbb{P}_{X,Y}\left(k,l\right)=\begin{cases}\frac{k}{36} & 1\le k=l\le 6\\ \frac{1}{36} & 1\le k<l\le 6\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

עבור השוליות: $X\sim\mathrm{U}\left[1,6\right]$, עבור Y צריך לרשום מפורשות את $\mathbb{P}\left(y=l\right)$ לכל l, או

$$Y\sim\begin{cases}\frac{2k-1}{36} & 1\le k\le 6\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

2 הילוך מקרי ועקרון השיקוף

יהי הילוך מקרי בעל n שלבים. נסמן S_n ־ המיקום הסופי של ההילוך, M_n ־ הערך המקסימלי אליו יגיע ההילוך.

<u>תרגיל:</u> מצאו את ההתפלגות המשותפת של (S_n, M_n).

<u>פתרון:</u> נרשום מפורשות את פונקציית ההתפלגות המשותפת.

נבדוק מתי מתקיים

$$\mathbb{P}\left(M_n = m, S_n = s\right) = 0$$

זה קורה כאשר:

1. $s > m$
2. s או m אינם שלמים
3. s, n בעלי זוגיות שונה
4. $m < 0$
5. $s > n$ או $s < -n$
6. $m > n$

נניח כי s, m אינם נכללים בתנאים אלה. נחשב את $\mathbb{P}\left(M_n = m, S_n = s\right)$.

נגדיר צמד מאורעות:

$$\begin{aligned} A &= \{S_n = 2m - s\} \\ B &= \{M_n \geq m, S_n = s\} \end{aligned}$$

ונוכיח שהמאורעות שווי הסתברות בעזרת עיקרון השיקוף. נשים לב שמאורע A הוא בעל הסתברות ידועה (חישבנו בתרגול קודם). בעזרת המאורע B ניתן לחשב את $\mathbb{P}\left(M_n = m, S_n = s\right)$ באופן הבא:

$$\mathbb{P}\left(M_n = m, S_n = s\right) = \mathbb{P}\left(M_n \geq m, S_n = s\right) - \mathbb{P}\left(M_n \geq m + 1, S_n = s\right)$$

המאורע השני מוכל בראשון, ובחיסור בין השניים מתקבלים כל ההילוכים שנגמרים בגובה s שבהם המקסימום הוא בדיוק m.

בעיקרון השיקוף, אנחנו בוחרים נקודה מסויימת בהילוך ומשקפים את כל הצעדים ־ עולים במקום לרדת, יורדים במקום לעלות. נבצע שיקוף החל מהנקודה הראשונה שבה הגענו לגובה m. לפני השיקוף, בין נקודה זו עד הסיום s, ירדנו $m - s$ יחידות, ולכן, לאחר השיקוף, נקודת הסיום תהיה $m - s$ צעדים מעל m ־ כלומר $2m - s$.

טענה 2.1 ישנה העתקה חד־חד־ערכית ועל (השיקוף) בין ההילוכים מתוך A להילוכים מתוך B.

ראינו שהשיקוף החל מהנקודה הראשונה בה מגיעים לגובה m הופך הילוך מתוך B להילוך מתוך A. צריך להוכיח ששיקוף דומה של הילוך מתוך A מביא אותנו להילוך מתוך

B. אם ניקח הילוך מתוך A ונשקף סביב הפעם הראשונה שההילוך מגיע לגובה m (אפשרי בוודאות כי נקודת הסיום בגובה $2m-s$, וכן $s \le m$, לכן $2m-s \ge m$), נקבל בחזרה הילוך שבמקום להוסיף $m-s$ יחידות למעלה, מוריד $m-s$ יחידות למטה ־ כלומר נסיים בגובה $m-(m-s)=s$. הגובה המקסימלי של הילוך זה הוא לפחות m, ונקודת הסיום היא s, ולכן ההילוך נמצא בתוך B.

לכן בעצם הוכחנו שמתקיים

$$\begin{aligned} |A| &= |B| \\ &\Downarrow \\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

נזכר כי מתקיים

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(S_n=2m-s)=\frac{\binom{n}{\frac{n+2m-s}{2}}}{2^n}$$

ולכן מתקיים

$$\mathbb{P}(M_n=m,S_n=s)=\frac{\binom{n}{\frac{n+2m-s}{2}}-\binom{n}{\frac{n+2(m+1)-s}{2}}}{2^n}$$

3 התפלגות מותנה ואי־תלות

3.1 התפלגות מותנה

נניח ויש לנו צמד משתנים מקריים (X,Y). ניתן להסתכל על המשתנה X כאשר $Y=l$ נתון. בפועל, ההתפלגות של $X \mid Y=l$ היא ההתפלגות המותנה של X בהינתן $Y=l$.

3.2 אי־תלות של משתנים מקריים

משתנים מקריים X,Y הם בלתי־תלויים אם לכל $k,l\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X=k,Y=l)=\mathbb{P}(X=k)\cdot\mathbb{P}(Y=k)$$

בעמודים 60־61 בחוברת יש אוסף טענות מהשיעור בנוגע למשתנים מקריים בלתי־תלויים.

<u>תרגיל:</u> בן משחק בקוביות. הוא מטיל קוביה הוגנת שוב ושוב.

X ־ מספר ההטלות עד שיוצא 6.

Y ־ מספר ההטלות עד שיוצא 2 או 4.

מצאו את:

1. ההתפלגויות השוליות.
2. ההתפלגות של $\min\{X,Y\}$

3. ההתפלגות המשותפת.

4. ההתפלגות של $Y \mid X = 2$.

פתרון:

1. $X \sim \mathrm{G}\left(\frac{1}{6}\right)$ - כל הטלה היא ניסוי, מטילים עד הצלחה - כשיוצא 6, בהסתברות $\frac{1}{6}$.
$Y \sim \mathrm{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ - כל הטלה היא ניסוי, מטילים עד הצלחה - כשיוצא 2 או 4, בהסתברות $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. $\min\{X, Y\}$ סופר את מספר ההטלות עד שיוצא 2,4 או 6 - הראשון מביניהם. שוב כל הטלה היא ניסוי ומטילים עד הצלחה - מספר זוגי כלשהו, בהסתברות $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, ולכן $\min\{X, Y\} \sim \mathrm{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. נחשב את ההסתברות $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$. עבור $l = k$ או $k \notin \mathbb{N}$ או $l \notin \mathbb{N}$, הסתברות זו היא 0. אחרת,

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) \begin{cases} \left(\frac{3}{6}\right)^{l-1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-l-1} \cdot \frac{1}{6} & k > l \\ \left(\frac{3}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{l-k-1} \cdot \frac{2}{6} & k < l \end{cases}$$

כאשר $k > l$, במקום l צריך לצאת 2 או 4, ולפניו יש $l - 1$ בהן יוצא $1, 3, 5$, ובמקום k יוצא 6. בין l לבין k יש $k - l - 1$ הטלות שבהן יוצא כל דבר שאינו 6.
כאשר $k < l$, במקום k יוצא 6, ולפניו יש $k - 1$ בהן יוצא $1, 3, 5$, ובמקום l יוצא 2 או 4. בין k לבין l יש $l - k - 1$ הטלות בהן יוצא $1, 3, 5, 6$.

4. עבור $Y \mid X = 2$, מתקיים

$$\mathrm{supp}\,(Y \mid X = 2) = \mathbb{N} \backslash \{0, 2\}$$

כעת,

$$\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 2) = \frac{\mathbb{P}(Y = 1, X = 2)}{\mathbb{P}(X = 2)} = \frac{\dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{1}{6}}{\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{6}} = \frac{2}{5}$$

ולעומת זאת עבור $l \geq 3$ שלם:

$$\mathbb{P}(Y = l \mid X = 2) = \frac{\mathbb{P}(Y = l, X = 2)}{\mathbb{P}(X = 2)} = \frac{\dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{4}{6}\right)^{l-2-1} \cdot \dfrac{2}{6}}{\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{6}} = \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{l-3}}{5}$$

תרגיל: מספר ביצי החופש שמטילה תרנגולת מאושרת מתפלג אחיד בין 1 לבין 4. מכל ביצה עתיד לבקוע אפרוח מאושר בהסתברות $\frac{1}{3}$ באופן בלתי־תלוי ביתר הביצים או מספרן.
X - מספר הביצים שהוטלו.
Y - מספר האפרוחים.

1. מצאו את ההתפלגות המשותפת.
2. האם X, Y תלויים?

פתרון:

1. התומך של (X,Y) הוא

$$\operatorname{supp}\left((X,Y)\right)=\left\{(k,l)\in\mathbb{N}^2 \mid 0\le k,l\le 4\wedge l\le k\wedge k\ge 1\right\}$$

נחשב בהתאם:

$$\mathbb{P}\left(X=k,Y=l\right)=\mathbb{P}\left(Y=l\mid X=k\right)\cdot\mathbb{P}\left(X=k\right)=\binom{k}{l}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{l}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-l}\cdot\frac{1}{4}$$

זאת משום שמתקיים $Y\mid X=k\sim\operatorname{Bin}\left(k,\frac{1}{3}\right)$ - יש k ביצים, שהן ניסויים (סליחה לטבעונים), והסתברות $\frac{1}{3}$ להצלחה - אפרוח.

2. X, Y תלויים. לדוגמה,

$$\mathbb{P}\left(X=1,Y=2\right)=0\neq\mathbb{P}\left(X=1\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y=2\right)$$

שכן שני המוכפלים בצד ימין חיוביים.