מבוא להסתברות

© ארזים

3 באפריל 2016

1 משתנים מקריים

משתנה מקרי X זו פונקציה שמוגדרת על מרחב הסתברות כלשהו, כך שלכל $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ הוא ערך בקבוצה S, בדרך כלל $S = \mathbb{R}$.

לכל משתנה מקרי X יש התפלגות.

התפלגות היא פונקציה, מסומנת μ או p, שמתארת את ההסתברות של X לקבל ערכים שונים בקבוצה S. פורמלית, $\mu : S \to [0,1]$, כך שמתקיים

$$\begin{aligned} \sum_{k\in S} \mu(k) &= 1 \\ \mu(k) &:= \mathbb{P}(X = k) \end{aligned}$$

הכתיבה $\{X = k\}$היא קיצור לכתיבה $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$.

<u>**דוגמא:**</u> יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ויהי $A \subseteq \Omega$ מאורע. האינדיקטור של A הוא המשתנה המקרי:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

<u>**תרגיל:**</u> נטיל 2 קוביות הוגנות. X - התוצאה המקסימלית. מה התפלגות X?

<u>**פתרון:**</u> בשאלות כאלה, נתחיל תמיד בזיהוי התומך של ההתפלגות - התומך של X. כלומר, נציין אילו ערכים מתקבלים בהסתברות חיובית.

במקרה זה, $\mathrm{Supp}(X) = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$\begin{aligned} \mu(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{36} \\ \mu(2) &= \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{36} \end{aligned}$$

באופן כללי,

$$\forall 1 \le k \le 6 \;\; \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \le k) - \mathbb{P}(X \le k-1) = \frac{k^2}{6^2} - \frac{(k-1)^2}{6^2} = \frac{2k-1}{36}$$

כלל אצבע: פונקציות מקסימום ננסה להציג בצורה $x \leq k$, פונקציות מינימום ננסה להציג בצורה $x \geq k$.

נניח שהיינו מגדירים Y- התוצאה המינימלית.

$$\forall 1 \leq k \leq 6 \ \ \mathbb{P}\left(Y=k\right)=\mathbb{P}\left(Y\geq k\right)-\mathbb{P}\left(Y\geq k+1\right)=\frac{\left(7-k\right)^{2}}{6^{2}}-\frac{\left(6-k\right)^{2}}{6^{2}}=\frac{13-2k}{36}$$

1.1 התפלגויות מוכרות

1.1.1 התפלגות ברנולי - $\mathrm{Ber}\left(p\right),0\leq p\leq1$

למשל, הטלת מטבע עם סיכוי p לעץ.

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\begin{cases} p & k=1\\ 1-p & k=0 \end{cases}$$

התומך - $\{0,1\}$.

1.1.2 התפלגות אחידה - $\mathrm{U}\left[1,N\right]$

זוהי התפלגות שמתייחסת למשתנה מקרי שמקבל ערכים בין 1 ובין N, כל ערך בהסתברות שווה.

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\frac{1}{N}$$

התומך - $\{1,\ldots,N\}$

1.1.3 התפלגות בינומית - $\mathrm{Bin}\left(n,p\right),1\leq n\in\mathbb{N},0\leq p\leq1$

מבצעים סדרה של n ניסויי ברנולי בלתי תלויים, למשל n הטלות מטבע עם סיכוי p להצלחה - לקבל 1). X - סופר את מספר ההצלחות הכולל.

התומך - $\{0,\ldots n\}$.

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot\left(1-p\right)^{n-k}$$

1.1.4 התפלגות גיאומטרית - $\mathrm{G}\left(p\right),0\leq p\leq1$

מבצעים סדרה של ניסויי ברנולי (לדוגמא - הטלת מטבע). X סופר את מספר הניסויים עד ההצלחה הראשונה.

התומך - $\mathbb{N}\backslash\left\{ 0\right\}$.

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\left(1-p\right)^{k-1}\cdot p$$

1.1.5 התפלגות בינומית שלילית - $\mathrm{NB}\left(\mathrm{r},\mathrm{p}\right),\mathrm{r}\in\mathbb{N},0\leq\mathrm{p}\leq1$

מבצעים סדרה של ניסויי ברנולי. X סופר כמה ניסויים נעשו עד שהושגו r הצלחות.
התומך - $\{r,r+1,\dots\}$

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\binom{k-1}{r-1}\cdot p^{r}\cdot\left(1-p\right)^{k-r}$$

ניתן להציג זאת כסכום של גיאומטריים.

1.1.6 התפלגות היפר־גיאומטרית - $\mathrm{HG}\left(N,D,n\right)$

ישנם N אובייקטים, מתוכם D מיוחדים, ודוגמים ללא החזרה n מתוך N. X סופר את מספר המיוחדים במדגם.

$$\mathbb{P}\left(x=k\right)=\frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

<u>תרגיל:</u> בכד יש 9 כדורים לבנים וכדור אחד שחור. מושכים באקראי, בזה אחר זה, כדורים מן הכד.
X - כמות ההוצאות עד הוצאת כדור שחור.
Y - מספר הוצאות עד הוצאת שלושה כדורים שחורים.

1. מה התפלגות X כאשר יש החזרה?
2. מה התפלגות X כאשר אין החזרה?
3. מה התפלגות Y כאשר יש החזרה?

<u>פתרון:</u> לפי סעיפים:

1. $X\sim\mathrm{G}\left(\frac{1}{10}\right)$, שכן X סופר מספר ניסויים (כל הוצאת כדור היא ניסוי) עד הצלחה ראשונה (כאשר הצלחה היא הוצאת כדור שחור).
2. התומך - $\{1,2,\dots,10\}$, השלמים בין 1 לבין 10. $X\sim\mathrm{U}\left[1,10\right]$ - הסיכוי של הכדור השחור להישלף בהוצאה מספר k זהה לסיכוי להישלף בהוצאה מספר $k+1$ וכן הלאה. באופן כללי, בכל פעם שיש הוצאה ללא החזרה, כדאי לעשות אנלוגיה לסידורים בשורה. בסידור עשרת הכדורים בשורה, השחור יכול ליפול בכל מקום בהסתברות שווה. לכן ההתפלגות אחידה.
3. $X\sim\mathrm{NB}\left(3,\frac{1}{10}\right)$ - ניסוי הוא הוצאת כדור, הצלחה היא הוצאת כדור שחור, וכעת Y סופר ניסויים שנעשים עד 3 הצלחות.

<u>תרגיל:</u> שיכור הולך בכל שלב ימינה צעד אחד בהתסברות p, ושמאלה צעד אחד בהסתברות $1-p$. ישנם בסך הכל N צעדים.
X - מיקום השיכור אחרי N צעדים.
Z - מספר הצעדים ימינה.

מצאו את התפלגויות X, Z.

פתרון: ההתפלגות של Z היא בינומית: $Z \sim \mathrm{Bin}\left(N,p\right)$. כל צעד הוא ניסוי, והצלחה היא צעד ימינה - מתרחש בסיכוי p. Z סופר את ההצלחות.

כעת, $X = Z - \left(N - Z\right)$ - המיקום הסופי הוא כמות הצעדים ימינה, פחות כמות הצעדים שמאלה. כלומר,

$$X = 2Z - N$$

לכן יתקיים

$$\mathbb{P}\left(X=k\right) = \mathbb{P}\left(2Z-N=k\right) = \mathbb{P}\left(Z=\frac{k+N}{2}\right) = \binom{N}{\frac{k+N}{2}} \cdot p^{\frac{k+N}{2}} \cdot \left(1-p\right)^{\frac{N-k}{2}}$$

כאשר $k+N$ זוגי, $-N \leq k \leq N$ שלם.

תרגיל: לבן 5 מטבעות הוגנים ובלתי תלויים. הוא מטיל את המטבעות. אם בחלקם יצא פלי, הוא מסלק אותם ומטיל את היתר. הוא ממשיך בתהליך שוב ושוב.

מה הסיכוי שבסבב ההטלות השני יקבל בדיוק 3 עצים?

פתרון: יש שתי דרכים - ארוכה וקצרה. נתחיל מהארוכה.

Y_1 - מספר העצים בסיבוב הראשון.

Y_2 - מספר העצים בסיבוב השני.

$Y_1 \sim \mathrm{Bin}\left(5, \frac{1}{2}\right)$. אם נתון שמתקיים $Y_1 = k$, אזי

$$\left(Y_2 \mid Y_1 = k\right) \sim \mathrm{Bin}\left(k, \frac{1}{2}\right)$$

נחפש

$$\mathbb{P}\left(Y_2 = 3\right) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}\left(Y_2 = 3 \mid Y_1 = k\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y_1 = k\right)$$

מציבים ערכים ומחשבים. עבור $k = 0,1,2$ נקבל $\mathbb{P}\left(Y_2 = 3 \mid Y_1 = k\right) = 0$. בסופו של דבר מגיעים לתשובה: $\frac{45}{512}$.

הדרך הקצרה - הניסוי הוא הטלת כל מטבע. הצלחה היא התוצאה היא עץ בשני הסבבים. כעת,

$$Y_2 \sim \mathrm{Bin}\left(5, \frac{1}{4}\right)$$