מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

13 במרץ 2016

1 הכלה והפרדה

תרגיל: תהי קבוצה $A=\{1,\ldots,2n\}$ ונבחר פרמוטציה σ על A באקראי. מה ההסתברות שיש בה מעגל באורך n בדיוק?
פתרון: נגדיר בתור B את המאורע המבוקש. נגדיר

$$\mathbb{I}=\{I\subseteq A\mid |I|=n\}$$

נגדיר את מאורעות העזר A_I - ישנו מעגל על קבוצת האינדקסים I. לכן

$$B=\bigcup_{I\in\mathbb{I}}A_I$$

נשים לב שלכל $I,J\in\mathbb{I}$,

$$A_I\cap A_J=\emptyset$$

אלא אם כן $I=J$ או $J=A\backslash I=I^c$. כעת,

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{I\in\mathbb{I}}A_I\right)=\sum_{\emptyset\neq L\subseteq\mathbb{I}}(-1)^{|L|+1}\cdot\mathbb{P}\left(\bigcap_{I\in L}A_I\right)$$

כמעט כל האיברים בסכום הזה הם אפס, שכן הם הסתברויות של קבוצה ריקה, אלא אם $|L|=1$ או $|L|=2$ וגם $L=\{I,I^c\}$. לכן, נמשיך עם השוויון:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{I\in\mathbb{I}}(-1)^{1+1}\cdot\mathbb{P}(A_I)+\sum_{I\in\mathbb{I}}(-1)^{2+1}\,\mathbb{P}(A_I\cap A_{I^c})\cdot\frac{1}{2}=\\
&= \binom{2n}{n}\cdot\mathbb{P}(A_I)-\frac{\binom{2n}{n}}{2}\mathbb{P}(A_I\cap A_{I^c})=\frac{\binom{2n}{n}\cdot(n-1)!\cdot n!}{(2n)!}-\frac{\binom{2n}{n}\cdot((n-1)!)^2}{2\cdot(2n)!}=\\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)
\end{aligned}$$

2 הילוך מקרי

נניח שאנו מגרילים סדרה באורך $n+1$, ונסמנה $s_0, s_1, \ldots, s_n$ כך שמתקיים

$$\begin{aligned} s_0 &= 0 \\ s_i - s_{i-1} &\in \{-1,1\} \forall 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

ההגרלה היא אחידה על פני כל הסדרות המתאימות. הגרלה שכזאת מייצרת הילוך והתהליך כולו נקרא הילוך מקרי. דרך שקולה לתיאור הסדרה היא סדרה באורך $n+1$ כאשר האיבר הראשון הוא 0 והשאר הם 1 או 1-, שגם היא נבחרת באופן אחיד.

תרגיל: יהי הילוך מקרי $(s_0, \ldots, s_n)$ שנבחר באקראי. מה ההסתברות שמתקיים $s_n = k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ נתון?

פתרון: נתחיל במצבים הקלים: כאשר $|k| > n$, $\mathbb{P}(s_0 = k) = 0$. כעת נניח שמתקיים $|k| \leq n$ בלי הגבלת הכלליות, נניח $k \geq 0$ (עבור k שלילי, הבעיה סימטרית לחלוטין: $\mathbb{P}(s_n = k) = \mathbb{P}(s_0 = |k|)$).

צריך לסיים בגובה k, לכן אם יש a צעדים למטה, ישנם $a+k$ צעדים למעלה. לכן

$$\begin{aligned} a + a + k &= n \\ \frac{n-k}{2} &= a \end{aligned}$$

נשים לב שאנחנו חייבים שהמספר $n-k$ יהיה זוגי - אחרת מספר הצעדים הנחוצים הוא שברי. באופן פורמלי, אם $n \not\equiv k \pmod 2$, מתקיים $\mathbb{P}(s_n = k) = 0$.

אחרת,

$$\mathbb{P}(s_0 = k) = \frac{\binom{n}{\frac{n-k}{2}}}{2^n}$$

3 הסתברות מותנה

יהי מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ עם מאורע B שהסתברותו חיובית. מרחב ההסתברות המותנה במאורע B הוא מרחב הסתברות עם מרחב מדגם Ω ופונקציית הסתברות

$$\mathbb{P}(\omega \mid B) = \begin{cases} 0 & \omega \notin B \\ \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(B)} & \omega \in B \end{cases}$$

מרחב זה הוא מרחב הסתברות לכל דבר, ומקיים את כל הכללים והתכונות שראינו.

תרגיל: בכד 10 כדורים ממוספרים. שולפים 4 ללא החזרה.

1. מה ההסתברות שכדור 7 הוצא?
2. ידוע שהכדור 9 הוצא. מה ההסתברות שהכדור 7 הוצא גם כן?
3. ידוע שאין מספר מתחת למספר 4 בחוץ. מה הסיכוי שהגדור 7 בחוץ?

4. מה הסיכוי שהכדור 7 לא בחוץ, אם ידוע שאין מספר מתחת למספר 4?

<u>פתרון:</u>

1. A הוא המאורע המבוקש.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{4}{10}$$

2. B הוא המאורע בו הכדור 9 הוצא.

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}}}{\frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

3. C הוא המאורע בו אין מספר שקטן מהמספר 4 בחוץ.

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{4}}}{\frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}} = \frac{4}{7}$$

4. השאלה היא

$$\mathbb{P}(A^c \mid C) = 1 - \mathbb{P}(A \mid C) = \frac{3}{7}$$

טעות נפוצה -

$$\mathbb{P}(A \mid C) = 1 - \mathbb{P}\left(A \mid \overline{C}\right)$$

3.1 כלל הכפל

יהיו מאורעות $A_1, \ldots, A_n$ במרחב ההסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$. נניח $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) > 0$, אזי

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

3.2 נוסחת ההסתברות השלמה

תהי $B_1, \dots B_n$ חלוקה של Ω, כלומר

$$\Omega = \biguplus_{i=1}^{n} B_i$$

וכן מתקיים $\mathbb{P}(B_i) > 0$ לכל i. אזי מתקיים

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

זוהי למעשה דרך מתמטית לתאר עץ הסתברויות, ולכן מאוד שימושית לחישוב הסתברויות.

3.3 חוק בייס

לכל צמד מאורעות A, B בעלי הסתברות חיובית,

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

תרגיל: הרכב הסטודנטים בתואר ראשון הוא: 50% בשנה א, 30% בשנה ב, 20% בשנה ג. 20% משנה א נשואים, 30% משנה ב נשואים, 40% משנה ג נשואים.

1. פגשנו סטודנט אקראי בשם אלון בתואר הראשון. מה הסיכוי שהוא נשוי.
2. בהנחה ואלון נשוי, מה הסיכוי שהוא משנה ג?
3. פגשנו סטודנט אחר, בן, גם מתואר ראשון ולא נשוי. מה הסיכוי שהוא משנה ג?

פתרון:

1. נסמן את המאורע M להיות המאורע בו הסטודנט נשוי, I כאשר הוא משנה א, II משנה ב, III משנה ג.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(M \mid I) \cdot \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(M \mid II) \cdot \mathbb{P}(II) + \mathbb{P}(M \mid III) \cdot \mathbb{P}(III) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0.27\end{aligned}$$

.2

$$\mathbb{P}(III \mid M) = \frac{\mathbb{P}(M \mid III) \cdot \mathbb{P}(III)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{0.2 \cdot 0.4}{0.27} = 0.296\dots$$

.3

$$\mathbb{P}(III \mid M^c) = \frac{\mathbb{P}(M^c \mid III) \cdot \mathbb{P}(III)}{\mathbb{P}(M^c)} = \frac{(1-0.4) \cdot 0.2}{1-0.27} = 0.164\dots$$

תרגיל: (הכד של פוליה) בכד 5 כדורים שחורים וכן 3 כדורים לבנים. בכך הוצאה של כדור מחזירים אותו יחד עם ארבעה נוספים מאותו הצבע.

1. מה הסיכוי שהכדור הראשון שחור?
2. מה הסיכוי שהכדור השני שחור?
3. מה הסיכוי שהכדור המאה שחור?

פתרון:

1. $\frac{5}{8}$.
2. נגדיר את המאורעות: B_i הוא המאורע בו הכדור שמספרו i שחור, W_i הוא המאורע בו הכדור שמספרו i לבן.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_2 \mid B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2 \mid W_1) \cdot \mathbb{P}(W_1) = \\ &= \frac{9}{12} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{8}\end{aligned}$$

3. פתרון בעזרת ניסוי שקול ושיקולי סימטריה. נניח והכדורים המקוריים ממוספרים, 1 עד 8. בניסוי, כל כדור שמוציאים מוחזר יחד עם 4 נוספים בעלי אותו מספר. משיקולי סימטריה בין המספרים והכדורים, הסיכוי להוציא מספר מסויים בשלב המאה הוא $\frac{1}{8}$. לכן הסיכוי להוציא כדור עם ספרה בין 1 לבין 5 בפעם המאה היא $\frac{5}{8}$.