

מבוא להסתברות

© ארזים

6 במרץ 2016

1 מרחבי הסתברות כלליים

טענה 1.1 תהי סדרה אינסופית של מאורעות. הוכיחו כי

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)$$

הוכחה: נגדיר סדרת מאורעות חדשה,

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_k &= \left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right) \end{aligned}$$

נשים לב כי לכל $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, כלומר הם זרים בזוגות. בנוסף,

$$\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigcup_{n=1}^N B_n$$

לכן,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(B_n) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k\right)\right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) - \left(\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k\right)\right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) - 0\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \end{aligned}$$

■

2 קומבינטוריקה

1. מספר הדרכים לסדר n עצמים בשורה: $n!$
2. מספר הדרכים לסדר n עצמים במעגל: $(n-1)!$
3. מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n עצמים ללא החזרה וללא חשיבות לסדר:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

תרגיל:

1. חשבו את

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

2. הוכיחו כי

$$\sum_{0=k \in \mathbb{Z}_{odd}}^n \binom{n}{k} = \sum_{0=k \in \mathbb{Z}_{even}}^n \binom{n}{k}$$

3. הוכיחו כי

$$\sum_{k=1}^n \left(k \cdot \binom{n}{k} \right) = n \cdot 2^{n-1}$$

4. הוכיחו כי

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

פתרון:

- 1.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

2.

$$0 = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{0=k \in \mathbb{Z}_{\text{even}}}^n \binom{n}{k} - \sum_{0=k \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}}^n \binom{n}{k}$$

3. נפתור בעזרת בעיית עזר. נניח ויש n אנשים, ואנו מעוניינים לבחור וועד עם יושב ראש כאשר הוועד כולל את יושב הראש ואולי רק אותם. דרך אחת - נבחר יושב ראש (n אפשרויות) ונבחר לאחר מכן וועד. עבור כל אדם מתוך $n - 1$ הנותרים, ישנן שתי אפשרויות - נמצא בוועד או לא נמצא בוועד, לכן בסך הכל יש $n \cdot 2^{n-1}$ אפשרויות לבחירת הוועד. דרך שנייה - נבחר וועד תחילה, מספר החברים בין 1 לבין n . מתוך הוועד נבחר יושב ראש. סך הכל יש מספר אפשרויות השווה

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot k$$

4. נפתור שוב בעזרת בעיית עזר. נניח שיש שתי קבוצות אנשים, כל אחת בגודל n . אנו מעוניינים לבחור n נציגים. דרך אחת - לבחור n אנשים מתוך $2n$. כמות האפשרויות היא $\binom{2n}{n}$. דרך שנייה - לבחור k נציגים מהקבוצה הראשונה, ולבחור $n - k$ מהשנייה, כאשר $k = 0, \dots, n$. מספר האפשרויות:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

3 מרחבי הסתברות אחידים

הגדרה 3.1 מרחב הסתברות (Ω, \mathbb{P}) נקרא אחיד אם לכל $\omega \in \Omega$ מתקיים

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

טענה 3.2 יהי $A \subseteq \Omega$ מאורע במרחב הסתברות אחיד. אזי

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

3.1 פרמוטציות

הגדרה 3.3 תהי קבוצה סופית A כלשהי. פרמוטציה (תמורה) σ היא העתקה חד־חד־ערכית ועל מהקבוצה לעצמה.

לדוגמא, עבור $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, פרמוטציה $\sigma : A \rightarrow A$ ניתן לייצג בצורה גרפית או בצורה המטריציאית הבאה:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

לחילופין, ניתן לרשום גם

$$\sigma = (a_1, a_3, a_2)$$

הגדרה 3.4 בתמורה σ קיים מעגל באורך $1 \leq k \leq n$ אם קיימים k איברים שונים $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ כך שמתקיים $\sigma(a_{i_j}) = a_{i_{j+1}}$ לכל $1 \leq j \leq k-1$, וכן מתקיים $\sigma(a_{i_k}) = a_{i_1}$.

דוגמא:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
 $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$

הגדרה 3.5 נקודת שבת בפרמוטציה σ היא מעגל באורך 1, כלומר איבר $a \in A$ כך שמתקיים $\sigma(a) = a$.

תרגיל: מה ההסתברות שבפרמוטציה σ על קבוצה בגודל n , שנבחרה באופן אחיד, יש מעגל באורך n ?

פתרון: נסמן בתור B את המאורע המבוקש, ונרצה לחשב

$$\mathbb{P}(B) = ?$$

גודל מרחב המדגם:

$$|\Omega| = n!$$

לכן,

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{n!}$$

נחשב את $|B|$.
 דרך אחת - לסדר את האיברים במעגל - $(n-1)!$
 דרך שנייה - לבנות את הפרמוטציה איבר-איבר. לראשון יש $n-1$ אפשרויות (לא יכול להיות מופנה לעצמו). נניח שהוא שולח לאיבר מסויים. איבר זה יכול לשלוח לאחת מבין $n-2$ אפשרויות (לא לעצמו וכן לא חזרה לראשון). ממשיכים כך כד הסוף, עד שלבסוף לאיבר האחרון יש אפשרות יחידה - להפנות חזרה לאיבר הראשון. סה"כ $(n-1)!$ אפשרויות.
 לכן

$$\mathbb{P}(B) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

תרגיל: מה ההסתברות שבפרמוטציה σ באורך $2n$ שנבחרה באופן אחיד יש בדיוק שני מעגלים באורך n כל אחד.

פתרון: נסמן בתור B את המאורע המבוקש, ונספור את האיברים בו. נבחר n איברים מתוך $2n$, ונסדר כל קבוצה במעגל. כעת כל אפשרות נספרה פעמיים, עבור הבחירה של קבוצה אחת או של השנייה. לכן סך הכל נקבל:

$$|B| = \frac{1}{2} \binom{2n}{n} (n-1)! (n-1)!$$

ומקבלים

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{(2n)!} = \frac{1}{2n^2}$$

4 הכלה והפרדה (הכלה והדחה)

עבור צמד מאורעות A, B מתקיים

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

הוכחה: נשים לב:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \setminus B) \cup B \\ A &= (A \cap B) \cup (A \setminus B) \end{aligned}$$

לכן מתקיים

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B) \end{aligned}$$

משילוב שתי המשוואות נקבל את הנדרש.

הנוסחה הכללית עבור n מאורעות:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_n\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

עבור שלושה איברים:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

תרגיל: עשרה זוגות מתיישבים באקראי סביב שולחן עגול. מה הסיכוי שאף זוג לא יושב יחד?

פתרון: B הוא המאוע המבוקש, נחפש את ההסתברות שלו. נגדיר מאורעות עזר - A_i הוא המאורע בו הזוג מספר i יושב יחד. ננסה לקשר בין B לבין A_i :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right) = \\ &= 1 - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, 10\}} (-1)^{|I|+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \end{aligned}$$

המספרים עצמם של הזוגות לא משנים - משנה רק כמה זוגות צריך שישבו יחד.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= 1 - \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \cdot \binom{10}{k} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \cdot \binom{10}{k} \cdot \frac{(19-k)! \cdot 2^k}{19!} = \\ &= \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \cdot \binom{10}{k} \cdot \frac{(19-k)! \cdot 2^k}{19!} \end{aligned}$$