מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

5 ביוני 2016

1 שרשרת אי פריקה

לכל צמד מצבים, ניתן להגיע בזמן סופי בהסתברות חיובית ממצב אחד לאחר. הגדרות שקולות:

$$\begin{aligned} \forall x,y &\in S\ \exists t\in\mathbb{N}^{+} \mid \mathbb{P}_x\left(X_t=y\right)>0 \\ \forall x,y &\in S\ \exists t\in\mathbb{N}^{+} \mid P^t\left(x,y\right)>0 \end{aligned}$$

2 מחזור של שרשרת

לכל $x\in S$, נגדיר את הקבוצה $T\left(x\right)=\left\{t\geq 1 \mid \mathbb{P}_x\left(X_t=x\right)>0\right\}$, וכן נגדיר את המחזור של x להיות $\gcd\left(T\left(x\right)\right)$.

בשרשרת אי פריקה, לכל המצבים יש את אותו המחזור, וזה נקרא המחזור של השרשרת.

אם המחזור הוא 1 השרשרת נקראת חסרת מחזור.

3 משפטי התכנסות

משפט 3.1 תהי שרשרת מרקוב אי פריקה עם התפלגות סטציונרית π. אזי לכל התפלגות התחלתית μ ולכל מצב y מתקיים

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\mathbb{P}_\mu\left(X_s=y\right)=\pi\left(y\right)$$

משפט 3.2 נתונה שרשרת מרקוב אי פריקה וחסרת מחזור עם התפלגות סטציונרית π. אזי קיימים $c>0$ וכן $0<\alpha<1$ כך שלכל התפלגות התחלתית μ ולכל מצב x מתקיים

$$\left|\mathbb{P}_\mu\left(X_t=x\right)-\pi\left(x\right)\right|<c\cdot\alpha^t$$

למעשה

$$\mathbb{P}_\mu\left(X_t=x\right)\xrightarrow[t\to\infty]{}\pi\left(x\right)$$

תרגיל תהי קבוצת מצבים $S=\{0,1,2\}$ ומטריצת מעבר

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

מצאו התפלגות סטציונרית π וקבעו האם $\mu_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi$ לכל התפלגות התחלתית μ.

פתרון נתחיל בתיאור השרשרת בצורה גרפית:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "1"] & \\
0 \arrow[ur, "1"] & & 2 \arrow[ll, "1"]
\end{tikzcd}$$

מסימטריה בין המצבים (או מכך שהמטריצה דו סטוכסטית) נקבל שההתפלגות הסטציונרית היא $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.
ניתן גם לחשב ישירות:

$$\begin{aligned}(a,b,1-a-b)\,P &= (a,b,1-a-b)\\ 1-a-b &= a\\ a &= b\\ b &= 1-a-b\\ a &= b=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

אין התכנסות משום שהשרשרת בעלת מחזור 3. ניקח לדוגמה $\mu=(1,0,0)$, ונקבל כי

$$\mathbb{P}_\mu\left(X_t=0\right)=\begin{cases}1 & t\equiv 0 \pmod 3\\ 0 & t\not\equiv 0 \pmod 3\end{cases}$$

תרגיל אלון - מטבע אדום - עץ בסיכוי p. בן - מטבע כחול - עץ בסיכוי q. בכל שלב, מטילים כל אחד את המטבע. אם יוצא פעמיים עץ, מתחלפים, ואחרת מתחילים מההתחלה. A_n - אחרי n שלבים, בן עם מטבע כחול. מצאו עבור אילו p,q $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(A_n\right)$ קיים וחשבו אותו.

פתרון יש 2 מצבים: לבן יש מטבע כחול, ולבן יש מטבע אדום.

$$P=\begin{pmatrix}1-pq & pq\\ pq & 1-pq\end{pmatrix}$$

מדו־סטוכסטיות נקבל כי $\pi=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

אם $pq>0$ השרשרת לא פריקה. אם $pq=0$ אזי היא פריקה, ויש התכנסות, כי נשארים לנצח במצב ההתחלתי.
אם $pq<1$ השרשרת חסרת מחזור. בסך הכל, אם $0<pq<1$ השרשרת אי פריקה וחסרת מחזור, ולכן יש התכנסות אל π.

תרגיל יהי גרף $G=(V,E)$ ונניח שמבצעים בו הילוך מקרי פשוט. כלומר, אם נמצאים בשלב t בקודקוד x, אזי בהסתברות $\frac{1}{\deg(x)}$ עוברים לקודקוד y אם $(x,y)\in E$ קשת.

1. הגדירו שרשרת מרקוב להילוך הזה.
2. הוכיחו שהשרשרת אי פריקה אם ורק אם הגרף קשיר.
3. הניחו כי G קשיר. הראו כי השרשרת בעלת מחזור 2 אם ורק אם הגרף דו צדדי. אחרת, המחזור הוא 1.
4. הניחו כי G קשיר. הוכיח כי $\pi(x)=\frac{\deg(x)}{2|E|}$.

פתרון

1. נגדיר $S=V$, וכן

$$P(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\deg(x)} & (x,y)\in E\\ 0 & (x,y)\notin E\end{cases}$$

אכן,

$$\sum_{y\in V}P(x,y)=\sum_{\substack{y\in V\\(x,y)\in E}}\frac{1}{\deg(x)}=1$$

2. ההוכחה המלאה בעמוד 126 בחוברת.
ההוכחה היא באינדוקציה. מראים שאם קיים מסלול באורך t שמתחיל בקודקוד x ומסתיים בקודקוד y, אזי $P^t(x,y)>0$, ולהיפך. האינדוקציה היא על t.
בסיס האינדוקציה: נרצה להוכיח כי $P(x,y)>0$ אם ורק אם יש מסלול באורך 1 שמתחיל בקודקוד x ומסתיים בקודקוד y, כלומר $(x,y)\in E$, כלומר $P(x,y)=\frac{1}{\deg(x)}>0$.
נניח את הטענה עבור $t=n$, ונוכיח עבור $t=n+1$. נניח כי יש מסלול באורך $n+1$ שתחיל בקודקוד x ומסתיים בקודקוד y. אזי קיים קודקוד z כך שיש מסלול באורך n שמתחיל בקודקוד x ומסתיים בקודקוד z, וכן $(y,z)\in E$. מהנחת האינדוקציה, $P^n(x,z)>0$, וכן $P(z,y)=\frac{1}{\deg(z)}>0$, ולכן $P^{n+1}(x,y)\geq P^n(x,z)\cdot P(z,y)>0$. הכיוון השני מאוד דומה - מניחים שהקואורדינטה חיובית, ומוצאים הילוך באורך $n+1$ שמתחיל בקודקוד x ומסתיים בקודקוד y.
3. גרף דו צדדי הוא גרף שניתן לצבוע את כל קודקודיו בשני צבעים כך שאין קשת שמחברת שני קודקודים באותו צבע. טענה מתורת הגרפים: טענה מתורת הגרפים: גרף הוא דו צדדי אם ורק אם כל מעגל בו הוא מאורך זוגי. מכאן נובע כי המחלק המשותף המקסימלי הוא 2 - משום שתמיד יש מעגל באורך 2 (לצאת ולחזור). אם הגרף לא דו צדדי, יש גם מעגל באורך אי זוגי, וכעת המחזור הוא $\gcd(2,k)$, כאשר k אי זוגי, ולכן מתקבל 1.

4. ראינו בכיתה.

תרגיל אריק ובנץ 3 כובעים. הכובעים בצבע לבן, שחר ואדום. אריק מתחיל עם כובע לבן, ובנץ עם השחור. הכל יום בוחרים באקראי אח, והוא מחליף את הכובע שלו עם הכובע שמותר בחוץ. X_n ־ מספר הפעמים שאריק לבש את הכובע השחור בתוך n השלבים הראשונים.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left(X_n\right)}{n}=?$$

פתרון נגדיר $S=\{WB,WR,BR,BW,RW,RB\}$, כאשר הקואורדינטה הראשונה היא של אריק והשנייה של בנץ. כמו כן

$$P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

נקבל כי $\pi=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$. לא נקבל התכנסות, אבל השאלה מדברת על שכיחות, ואנחנו יודעים שמספיקה אי פריקות להתכנסות השכיחות בכל מצב להתפלגות הסטציונרית. השכיחות שאריק עם כובע שחור היא סכום השכיחויות במצבים BR,BW, ושכיחות זו היא $\frac{1}{6}$, לכן נקבל $\frac{1}{3}$.
נמשיך לסעיפים הבאים. האם ההסתברות של BR מתכנסת?
לא! השרשרת מחזורית ואין התכנסות.
כעת נכניס עדכון לשרשרת ־ אם הכובע האדום הוא זה שבצד, אז בסיכוי שליש יחליפו ביניהם כובעים, ובסיכוי שני שליש ־ כמו קודם. כעת,

$$P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

השאלה ־ חשבו את ההסתברות שבנץ לובש את הכובע השחור ביום n כאשר $n\to\infty$.
חשבו אותו דבר עבור הכובע האדום.
ההתפלגות הסטציונרית

$$\pi=\left(\frac{3}{14},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{3}{14},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)$$

כעת, אם מסתכלים על זמנים זוגיים יש שרשרת על $\{WB,RW,BR\}$. שרשרת זו לא מחזורית ואי פריקה. ההתפלגות הסטציונרית עדיין תלוייה בדרגות והיא

$$\pi=\left(\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{2}{7}\right)$$

עושים בדומה לאי־זוגיים ומקבלים תוצאה שונה עבור המצב עם הכובע השחור, לכן אין התכנסות.
בסעיף ד מוצאים שבזוגיים ובאי־זוגיים יש אותה תוצאה, לכן יש התכנסות.