מבוא להסתברות

© ארזים

15 במאי 2016

1 מקדם מתאם

יהיו צמד משתנים X,Y על $(\Omega,\mathbb{P})$. נניח כי לשניהם שונות סופית.

$$\rho\left(X,Y\right)=\frac{\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)\mathrm{Var}\left(Y\right)}}$$

1.1 תכונות

1.

$$-1\le\rho\left(X,Y\right)\le1$$

2. $\rho\left(X,Y\right)=1\iff Y=aX+b$, $a>0$, b ממשיים.

3. $\rho\left(X,Y\right)=-1\iff Y=aX+b$, $a<0$, b ממשיים.

תרגיל בקערה 10 אגסים, 10 תפוחים, 10 בננות. מוציאים באקראי 10 פירות ללא החזרה. X - מספר התפוחים שהוצאו, Y - מספר הבננות שהוצאו. מצאו את $\rho\left(X,Y\right)$.

פתרון נניח כי Z הוא מספר האגסים שהוצאו. אזי $X+Y+Z=10$. כעת מתקיים $X\sim Y\sim Z\sim\mathrm{HG}\left(30,10,10\right)$. לכן, $\mathrm{Var}\left(X\right)=\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathrm{Var}\left(Z\right)$. בנוסף, $X+Y=10-Z$, לכן $\mathrm{Var}\left(X+Y\right)=\mathrm{Var}\left(10-Z\right)=\mathrm{Var}\left(Z\right)$.

$$\rho\left(X,Y\right)=\frac{\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)\cdot\mathrm{Var}\left(Y\right)}}=\frac{\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)}{\mathrm{Var}\left(X\right)}$$

נזכר כי $\mathrm{Var}\left(X+Y\right)=\mathrm{Var}\left(X\right)+\mathrm{Var}\left(Y\right)+2\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)$, כלומר $\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Var}\left(X+Y\right)-\mathrm{Var}\left(X\right)-\mathrm{Var}\left(Y\right)\right)$, ובפרט במקרה שלנו $\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{Var}\left(X\right)$, כלומר

$$\rho\left(X,Y\right)=-\frac{\mathrm{Var}\left(X\right)}{2\mathrm{Var}\left(X\right)}=-\frac{1}{2}$$

תרגיל יש 100 כדורים בכד, ממוספרים 1 עד 100. מוציאים ללא החזרה 10 כדורים. X_i - הערך של הכדור i שהוצאנו. חשבו $\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)$ עבור $i\neq j$.

פתרון נמשיך את הניסוי ונוציא את כל יתר הכדורים, אחד אחרי השני, עד שהוצאנו את כל הכדורים ללא החזרה. X_i הערך שעל כדור i שהוצאנו.

$$\sum_{i=1}^{100}X_i=\sum_{i=1}^{100}i=5050$$

לכן

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=0=\sum_{i=1}^{100}\mathrm{Var}\left(X_i\right)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)$$

משיקולי סימטריה, $X_i\sim X_j$ לכל $i\neq j$. בפרט $X_i\sim\mathrm{U}\left[1,100\right]$: שונות של משתנה שמתפלג $\mathrm{U}\left[a,b\right]$ היא $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$ (בחוברת), לכן

$$\mathrm{Var}\left(X_i\right)=\frac{\left(100-1+1\right)^2-1}{12}=\frac{9999}{12}$$

לכן,

$$0=100\cdot\frac{9999}{12}+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)$$

משיקולי סימטריה שוב, $\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)=\mathrm{Cov}\left(X_l,X_m\right)$ ולכן

$$\begin{aligned}0&=100\cdot\frac{9999}{12}+100\cdot 99\cdot\mathrm{Cov}\left(X_1,X_2\right)\\ \mathrm{Cov}\left(X_1,X_2\right)&=-\frac{9999}{12\cdot 99}=-\frac{101}{12}\end{aligned}$$

2 תוחלת מותנה ושונות מותנה

2.1 התנייה על מאורע

הגדרה 2.1 יהי X משתנה מקרי במרחב $(\Omega,\mathbb{P})$. יהי מאורע A במרחב כך שמתקיים $\mathbb{P}\left(A\right)>0$. נגדיר את התוחלת של X במרחב המותנה במאורע A:

$$\mathbb{E}\left(X\mid A\right)=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)\mathbb{P}\left(\omega\mid A\right)$$

טענה 2.2 שקול להגדרה

$$\sum_{k}k\cdot\mathbb{P}\left(X=k\mid A\right)$$

הגדרה 2.3 השונות של X בהינתן A:

$$\mathrm{Var}\left(X\mid A\right)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}\left(X\mid A\right)\right)^{2}\mid A\right)=\mathbb{E}\left(\left(X\mid A\right)^{2}\right)-\left(\mathbb{E}\left(X\mid A\right)\right)^{2}$$

כל הטענות שראינו עבור תוחלת ושונות תקפות גם עבור תוחלת ושונות בהתנייה על מאורע.

טענה 2.4 אם $\mathbb{E}\left(X\right)$ סופית אז $\mathbb{E}\left(X\mid A\right)$ סופית (בהנחה שההסתברות של A חיובית).

ההוכחה מתבססת על תרגיל בית, בו מראים כי $\mathbb{E}\left(X\mid A\right)=\frac{\mathbb{E}(X\cdot1_{A})}{\mathbb{P}(A)}$.

2.2 התנייה על משתנה מקרי

הגדרה 2.5 יהיו X,Y משתנים מקריים על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$. נגדיר את המשתנה המקרי $\mathbb{E}\left(X\mid Y\right)$ להיות

$$\mathbb{E}\left(X\mid Y\right)\left(\omega\right):=\mathbb{E}\left(X\mid Y=Y\left(\omega\right)\right)$$

משפט 2.6 (משפט התוחלת השלמה) יהיו X,Y משתנים מקריים על אותו המרחב, בעלי תוחלת סופית. אזי

$$\mathbb{E}\left(X\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\mid Y\right)\right)$$

הוכחה: באופן מפורש:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\mid Y\right)\right) &= \sum_{y\in\mathrm{Supp}(Y)}\mathbb{E}\left(X\mid Y=y\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)=\\
&= \sum_{y\in\mathrm{Supp}(Y)}\left(\sum_{x\in\mathrm{Supp}(X)}x\cdot\mathbb{P}\left(X=x\mid Y=y\right)\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)=\\
&= \sum_{y}\left(\sum_{x}x\cdot\frac{\mathbb{P}\left(X=x,Y=y\right)}{\mathbb{P}\left(Y=y\right)}\cdot\mathbb{P}\left(Y=y\right)\right)=\sum_{x}x\cdot\left(\sum_{y}\mathbb{P}\left(X=x,Y=y\right)\right)=\\
&= \sum_{x}x\cdot\mathbb{P}\left(X=x\right)=\mathbb{E}\left(X\right)
\end{aligned}$$

■

תרגיל אלון הוא כורה פחם הנמצא במערה עם שלושה פתחים. אם יבחר נכון, הוא ייצא תוך שבע שעות, אחרת יחזור לנקודת ההתחלה תוך 3 או 5 שעות, בהתאם לפתח שבחר. בכל שלב הוא בוחר באופן בלתי תלוי ובאקראי פתח. X - הזמן שייקח לו לצאת. מצאו את $\mathbb{E}(X)$.

פתרון נגדיר משתנה מקרי Y להיות הבחירה הראשונה של אלון:

$$Y \sim \begin{cases} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 9 & \frac{1}{3} \end{cases}$$

כאשר 1 הדלת של שבע שעות, 0 הדלת של 3 שעות, 9 הדלת של 5 שעות. כעת

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y)) = \mathbb{E}(X \mid Y=1) \cdot \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{E}(X \mid Y=0) \cdot \mathbb{P}(Y=0) + \\ &+ \mathbb{E}(X \mid Y=9) \cdot \mathbb{P}(Y=9) = \frac{1}{3}(7+3+\mathbb{E}(X)+5+\mathbb{E}(X)) \\ 3\mathbb{E}(X) &= 15 + 2\mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) &= 15 \end{aligned}$$

תרגיל מטילים מטבע הוגן עד קבלת H לראשונה. N- מספר ההטלות. מכינים מטבע חדש עם סיכוי $\frac{1}{N}$ עבור H ומטילים אותו N פעמים. R - מספר H בהטלות המטבע החדש.

1. האם N, R תלויים?
2. חשבו את תוחלת R.

פתרון

1. תלויים, שכן

$$\begin{aligned} (R \mid N=1) &= 1 \\ (R \mid N=2) &\sim \text{Bin}\left(2, \frac{1}{2}\right) \\ \mathbb{P}(R=2 \mid N=2) &\neq \mathbb{P}(R=2 \mid N=1) \end{aligned}$$

2. לכל n טבעי מתקיים

$$\begin{aligned} (R \mid N=n) &\sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{n}\right) \\ \mathbb{E}(R \mid N=n) &= n \cdot \frac{1}{n} = 1 \\ \mathbb{E}(R) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(R \mid N)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(R \mid N=n) \cdot \mathbb{P}(N=n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) = 1 \end{aligned}$$