מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

27 במרץ 2016

סוף הדוגמה מהשיעור שעבר:
מראים שכאשר

$$p = \frac{(1-\varepsilon)\log n}{n}$$

עם $\varepsilon > 0$, ההסתברות לילד ללא חברים שואפת לאחד.
חישבנו בשיעור שעבר שההסתברות למשלים של המאורע הזה היא

$$\left(1-(1-p)^n\right)^n$$

ניזכר בלמה שהייתה לנו מחדוא, ונקבל שמתקיים

$$(1-p)^n \geq e^{-p-2p^2}$$

ולכן

$$\left(1-(1-p)^n\right)^n \leq \left(1-e^{-n\left(p+2p^2\right)}\right)^n \leq e^{-ne^{-n\left(p+2p^2\right)}}$$

נותר רק לבדוק לאן השאיפה כעת. נציב את p ונקבל

$$\begin{aligned} n\left(p+2p^2\right) &= n\left(\frac{(1-\varepsilon)\log n}{n} + 2\frac{(1-\varepsilon)^2\log^2 n}{n^2}\right) = (1-\varepsilon)\log n + 2\frac{(1-\varepsilon)^2\log^2 n}{n} = \\ &= (1-\varepsilon)\log n + a_n \end{aligned}$$

נמשיך להציב:

$$ne^{-n\left(p+2p^2\right)} = ne^{-(1-\varepsilon)\log n - a_n} = n\cdot\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\cdot e^{-a_n} = n^{\varepsilon}\cdot e^{-a_n}$$

לכן בסה"כ ההסתברות שלנו היא

$$\left(1-(1-p)^n\right)^n \leq e^{-n^{\varepsilon}e^{-a_n}}$$

כעת, כיוון שמתקיים

$$a_n = \frac{2\left(1-\varepsilon\right)^2 \log^2 n}{n} \leq 1$$

עבור n גדול מספיק, מתקיים

$$e^{-n^{\varepsilon}\cdot e^{-a_n}} \leq e^{-n^{\varepsilon}\cdot \frac{1}{\varepsilon}} \to 0$$

<u>אי־תלות מותנה:</u> יהיו A, B, C מאורעות כך שמתקיים $\mathbb{P}\left(C\right) > 0$. ניתן לשאול האם A, B בלתי תלויים במרחב המותנה במאורע C, כלומר

$$\mathbb{P}\left(A\cap B \mid C\right) = \mathbb{P}\left(A \mid C\right)\cdot \mathbb{P}\left(B \mid C\right)$$

אין גרירה מאי־תלות כזאת לאי־תלות במרחב המקורי, וגם לא בכיוון ההפוך.

נראה דוגמה לכך שאי־תלות בזוגות לא גוררת אי־תלות: נטיל מטבע הוגן פעמיים ונגדיר את המאורעות הבאים ־ A הוא עץ בהטלה הראשונה, B הוא עץ בהטלה השנייה, C הוא בדיוק עץ אחד. ניתן לראו תשכל זוג בלתי־תלויים, אבל השלושה יחד אינם בלתי־תלויים.

נראה גם הסבר לכך, בלי בנייה, באמצעות אלגברה לינארית:

אי־תלות של A, B, C דורשת:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A\cap B\right) &= \mathbb{P}\left(A\right)\cdot \mathbb{P}\left(B\right)\\
\mathbb{P}\left(A\cap C\right) &= \mathbb{P}\left(A\right)\cdot \mathbb{P}\left(C\right)\\
\mathbb{P}\left(B\cap C\right) &= \mathbb{P}\left(B\right)\cdot \mathbb{P}\left(C\right)\\
\mathbb{P}\left(A\cap B\cap C\right) &= \mathbb{P}\left(A\right)\cdot \mathbb{P}\left(B\right)\cdot \mathbb{P}\left(C\right)
\end{aligned}$$

נבחר שרירותית $\mathbb{P}\left(A\right) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}\left(B\right) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}\left(C\right) = \frac{1}{5}$. כעת אגפי ימין נקבעו לנו. נראה קיום דוגמה שמקיימת את השוויונות הראשון, השני והרביעי, אך לא את השלישי, באמצעות אלגברה לינארית. ניקח את מרחב המדגם

$$\Omega = \left\{0,1\right\}^3$$

כאשר המאורעות הם A ־ 1 בקואורדינטה הראשונה, B ־ 1 בקואורדינטה השנייה, C ־ 1 בקואורדינטה השלישית. צריך עוד לבחור את פונקציית ההסתברות. לפי הנתונים, נצטרך

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A\right) &= \frac{1}{2} = \mathbb{P}\left(\left(1,0,0\right)\right) + \mathbb{P}\left(\left(1,0,1\right)\right) + \mathbb{P}\left(\left(1,1,0\right)\right) + \mathbb{P}\left(\left(1,1,1\right)\right)\\
\mathbb{P}\left(B\right) &= \frac{1}{3} = \mathbb{P}\left(\left(0,1,0\right)\right) + \mathbb{P}\left(\left(0,1,1\right)\right) + \mathbb{P}\left(\left(1,1,0\right)\right) + \mathbb{P}\left(\left(1,1,1\right)\right)\\
\mathbb{P}\left(C\right) &= \frac{1}{5} = \dots\\
\mathbb{P}\left(A\cap B\right) &= \frac{1}{6} = \mathbb{P}\left(\left(1,1,0\right)\right) + \mathbb{P}\left(\left(1,1,1\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap C) &= \frac{1}{10}=\dots\\ \mathbb{P}(A\cap B\cap C) &= \frac{1}{30}=\mathbb{P}((1,1,1))\\ 1 &= \mathbb{P}((0,0,0))+\ldots+\mathbb{P}((1,1,1))\end{aligned}$$

כיוון שיש לנו 7 משוואות עם 8 נעלמים, או שאין פתרון או שהפתרון הכללי הוא מהצורה

$$\vec{p}=\vec{p_o}+t\cdot\vec{q}$$

כאשר $\vec{q}$ הוא פתרון למערכות ההמוגונית. יש פתרון, שכן ניתן לקחת את מרחב המכפלה שבו A,B,C בלתי־תלויים לחלוטין, והוא פתרון. נבחר את $\vec{p_0}$ להיות פתרון זה. בפתרון זה כל ההסבתרויות הן בין אפס לבין אחד.

על ידי לקיחת t חיובי ומאוד מאוד קטן, נקבל פתרון נוסף מהצורה שבו כל הקואורדינטות חיוביות, הוא מקיים את 7 המשוואות, והוא לא הפתרון הבלתי־תלוי לחלוטין.

1 משתנים מקריים

<u>דוגמא:</u> הטלת קוביה הוגנת פעמיים.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i,j)\mid 1\le i,j\le 6\}\\ \mathbb{P}(\omega) &= \frac{1}{36}\,\forall\omega\in\Omega\end{aligned}$$

משתנה מקרי הוא כמות מקרית בניסוי. למשל בדוגמא שלנו, סכום התוצאות בשתי ההטלות הוא משתנה מקרי.

הגדרה 1.1 <u>משתנה מקרי</u> X הוא פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$ (או לקבוצה יותר כללית).

בדוגמא שלנו,

$$\begin{aligned}X:\Omega &\to \mathbb{R}\\ X(i,j) &= i+j\end{aligned}$$