מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

23 במרץ 2016

1 מרחבי מכפלה

נתונים שני ניסויים: $\left(\Omega_1,\mathbb{P}_1\right),\left(\Omega_2,\mathbb{P}_2\right)$. לדוגמא, הטלת קוביה הוגנת, ואז הטלת קוביה תלת־צדדית לא הוגנת:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{1,2,3,4,5,6\}\\ \mathbb{P}_1\left(\omega\right) &= \frac{1}{6}\\ \Omega_2 &= \{1,2,3\}\\ \mathbb{P}_2 &= \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right\}\end{aligned}$$

נרצה לדבר על הניסוי שבו מבצעים את שני הניסויים באופן בלתי תלוי. נקרא למרחב ההסתברות החדש $\left(\Omega,\mathbb{P}\right)$, ולעתים נסמן

$$\left(\Omega,\mathbb{P}\right)=\left(\Omega_1,\mathbb{P}_1\right)\otimes\left(\Omega_2,\mathbb{P}_2\right)$$

בדוגמא נגדיר

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_1\times\Omega_2=\{(i,j)\mid i\in\Omega_1,j\in\Omega_2\}\\ \mathbb{P}\left((i,j)\right) &= \mathbb{P}_1\left(i\right)\cdot\mathbb{P}_2\left(j\right)=\begin{cases}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} & j=1\\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} & j\in\{2,3\}\end{cases}\end{aligned}$$

במקרה הכללי נגדיר:

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_1\times\Omega_2\\ \mathbb{P}\left(\omega\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\omega_1,\omega_2\right)\right)=\mathbb{P}_1\left(\omega_1\right)\cdot\mathbb{P}_2\left(\omega_2\right)\end{aligned}$$

טענה 1.1 נרצה לדעת:

1. זהו מרחב הסתברות.

2. אם $A_1 \subseteq \Omega_1, A_2 \subseteq \Omega_2$ נגדיר

$$\begin{aligned}\overline{A_1} &= A_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 \in A_1\}\\ \overline{A_2} &= \Omega_1 \times A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_2 \in A_2\}\end{aligned}$$

נשים לב שמתקיים

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = A_1 \times A_2$$

נרצה אי תלות, במובן שמתקיים

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \times \overline{A_2}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)$$

3. עבור $A_1 \subseteq \Omega_1, A_2 \subseteq \Omega_2$, נרצה

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) &= \mathbb{P}_1\left(A_1\right)\\ \mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right) &= \mathbb{P}_2\left(A_2\right)\end{aligned}$$

בדוגמא, למשל, ניקח את A_1 להיות המאורע בו הקוביה הראשונה נתנה תוצאה זוגית, ואת A_2 להיות המאורע בו הקוביה התלת־צדדית לא נפלה על התוצאה 2. נדגיש שאנחנו מתכוונים להגדרות בצורה שמתקיים

$$\begin{aligned}A_1 &= \{2,4,6\} \subseteq \Omega_1\\ A_2 &= \{1,3\} \subseteq \Omega_2\\ \overline{A_1} &= A_1 \times \Omega_2 = \{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3),(6,1),(6,2),(6,3)\}\\ \overline{A_2} &= \Omega_1 \times A_2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}\\ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} &= \{(2,1),(2,3),(4,1),(4,3),(6,1),(6,3)\} = A_1 \times A_2\end{aligned}$$

הוכחה: (שלוש התכונות)

יהיו $A_1 \subseteq \Omega_1, A_2 \subseteq \Omega_2$. נראה קודם שמתקיים

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_1 \times A_2\right) &= \mathbb{P}_1\left(A_1\right) \cdot \mathbb{P}_2\left(A_2\right)\\ \mathbb{P}\left(A_1 \times A_2\right) &:= \sum_{\omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2} \mathbb{P}\left(\left(\omega_1, \omega_2\right)\right) = \sum_{\omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2} \mathbb{P}_1\left(\omega_1\right) \cdot \mathbb{P}_2\left(\omega_2\right)\end{aligned}$$

נפתח את אגף ימין של השוויון הראשון:

$$\mathbb{P}_1\left(A_1\right) \cdot \mathbb{P}_2\left(A_2\right) = \left(\sum_{\omega_1 \in \Omega_1} \mathbb{P}_1\left(\omega_1\right)\right) \cdot \left(\sum_{\omega_2 \in \Omega_2} \mathbb{P}_2\left(\omega_2\right)\right) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2} \mathbb{P}_1\left(\omega_1\right) \cdot \mathbb{P}_2\left(\omega_2\right)$$

כעת התכונה הראשונה נובעת:

$$\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)=\sum_{\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2}\mathbb{P}\left(\left(\omega_1,\omega_2\right)\right)=\mathbb{P}\left(\Omega_1\times\Omega_2\right)=\mathbb{P}_1\left(\Omega_1\right)\cdot\mathbb{P}_2\left(\Omega_2\right)=1\cdot 1=1$$

נוכיח כעת את התכונה השלישית.

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)=\mathbb{P}\left(A_1\times\Omega_2\right)=\mathbb{P}_1\left(A_1\right)\cdot\mathbb{P}_2\left(\Omega_2\right)=\mathbb{P}_1\left(A_1\right)$$

ההוכחה של השוויון השני סימטרית לחלוטין.
נותרה לנו התכונה השנייה.

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)=\mathbb{P}\left(A_1\times A_2\right)=\mathbb{P}_1\left(A_1\right)\cdot\mathbb{P}_2\left(A_2\right)=\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)$$

ובכך סיימנו את ההוכחה. ■

מכאן ניתן לקבל טענה דומה לגבי n ניסויים. אם $\left(\Omega_i,\mathbb{P}_i\right)$ מרחבי הסתברות ($1\leq i\leq n$), נוכל להגדיר את מרחב המכפלה:

$$\left(\Omega,\mathbb{P}\right)=\bigotimes_{i=1}^{n}\left(\Omega_i,\mathbb{P}_i\right)$$

כלומר,

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_1\times\cdots\times\Omega_n\\ \mathbb{P}\left(\omega_1,\ldots,\omega_n\right) &= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i\left(\omega_i\right)\end{aligned}$$

ויתקיימו האנלוגים לשלוש התכונות:

1. זהו מרחב הסתברות.
2. לכל i, אם $A_i\subseteq\Omega_i$ מאורע, נגדיר

$$\overline{A_i}=\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{i-1}\times A_i\times\Omega_{i+1}\times\cdots\times\Omega_n$$

יתקיים

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right)=\mathbb{P}_i\left(A_i\right)$$

3. יהיו $A_i\in\Omega_i$ מאורעות מניסויים שונים. אזי

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_n}\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right)$$

ומכאן אפשר להסיק שהמאורעות בלתי־תלויים במרחב ההסתברות.

ניתן לקבל את התוצאות הללו ישירות מהתוצאות לזוג מרחבים. נדגים עבור $n=3$.

$$(\Omega_1,\mathbb{P}_1)\otimes(\Omega_2,\mathbb{P}_2)\otimes(\Omega_3,\mathbb{P}_3)\cong((\Omega_1,\mathbb{P}_1)\otimes(\Omega_2,\mathbb{P}_2))\otimes(\Omega_3,\mathbb{P}_3)$$

זוהי אסוציאטיביות הכפל. איברים במרחב השני הם מהצורה $((\omega_1,\omega_2),\omega_3)$, כאשר מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\left(\left(\omega_1,\omega_2\right),\omega_3\right)\right)=\mathbb{P}_1\left(\omega_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(\omega_2\right)\cdot\mathbb{P}\left(\omega_3\right)$$

לכן המכפלה היא מרחב הסתברות, ישירות מן התוצאה עבור זוג מרחבים. כמו כן,

$$\overline{A_1}=A_1\times\Omega_2\times\Omega_3\cong(A_1\times\Omega_2)\times\Omega_3$$

כעת

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)&=\mathbb{P}\left(A_1\times\Omega_2\times\Omega_3\right)=\mathbb{P}\left(\left(A_1\times\Omega_2\right)\times\Omega_3\right)=\\&=\left(\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_2\right)\left(A_1\times\Omega_2\right)\cdot\mathbb{P}_3\left(\Omega_3\right)=\mathbb{P}_1\left(A_1\right)\cdot\mathbb{P}_2\left(\Omega_2\right)\cdot\mathbb{P}_3\left(\Omega_3\right)=\mathbb{P}_1\left(A_1\right)\end{aligned}$$

שאר התכונות נובעות באותו אופן.
כיצד נראה שהמאורעות $\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3}$ בלתי־תלויים? ראינו כבר

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right)=\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\overline{A_3}\right)$$

נבדוק למשל

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)&=\mathbb{P}\left(\left(A_1\times\Omega_2\times\Omega_3\right)\cap\left(\Omega_1\times A_2\times\Omega_3\right)\right)=\mathbb{P}\left(A_1\times A_2\times\Omega_3\right)=\\&=\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{\Omega_3}\right)=\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\overline{\Omega_3}\right)=\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)\cdot\mathbb{P}_3\left(\Omega_3\right)=\\&=\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)\end{aligned}$$

1.1 שימוש למרחבי מכפלה

שתי כיתות בנות n ילדים יוצאות ליום גיבוש. כל תלמיד מכיתה 1 מתחבר לתלמיד מכיתה 2 בסיכוי p, באופן בלתי־תלוי בין זוגות הילדים. מרחב הסתברות שממדל זאת הוא מרחב מכפלה. ניסוי בסיסי הוא חברות בין שני ילדים: לכל $1\le i,j\le n$,

$$\begin{aligned}\Omega_{(i,j)}&=\{0,1\}\\\mathbb{P}_{(i,j)}&=\{1-p,p\}\end{aligned}$$

כאשר 0 מייצג "לא חברים" בעוד 1 מייצג "חברים".
מרחב ההסתברות לניסוי הכולל הוא

$$(\Omega,\mathbb{P})=\bigotimes_{i,j=1}^{n}\left(\Omega_{(i,j)},\mathbb{P}_{(i,j)}\right)$$

במילים אחרות, זהו אוסף הגרפים הדו־צדדייפ עם n קודקודים בכל צד, כאשר ההסתברות של $G=(V,E)$ מסויים היא

$$p^{|E|}\cdot(1-p)^{n^2-|E|}$$

מה ההסתברות שיש תלמיד בכיתה 1 ללא חברים?

טענה 1.2 יהי $\varepsilon>0$.

1. כאשר $p=\frac{(1+\varepsilon)\ln n}{n}$, אז ההסתברות שקיים ילד ללא חברים שואפת לאפס כאשר n שואף לאינסוף.
2. כאשר $p=\frac{(1-\varepsilon)\ln n}{n}$, אז ההסתברות שקיים ילד ללא חברים שואפת לאחד כאשר n שואף לאינסוף.

למה 1.3 (חדו"א)

1. לכל x ממשי, $1-x\leq e^{-x}$.
2. עבור $0\leq p\leq\frac{1}{2}$, $1-p\geq e^{-p-2p^2}$.

הוכחה: סעיף א עבור $x\geq 1$ ברור. לכן נניח כרגע $|x|<1$, אזי

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{1-(x')^2}-\frac{x^2}{2}\leq -x$$

כאשר השוויון הראשון נובע מפיתוח טיילור של $\ln(1-x)$ עם נקודה שבין 0 לבין x. כאשר $0\leq x\leq\frac{1}{2}$ נובע גם

$$\ln(1-x)\geq -x-2x^2$$

במקרה הכללי, לכל x, נוכל לשים לב שהישר $1-x$ הוא המשיק לפונקציה e^{-x} בנקודה 0, ושפונקציה זו קמורה (אפשר גם שוב מטיילור). ■

הוכחה: (של הטענה)

1. ברור כי המאורע בו יש ילד ללא חברים הוא איחוד המאורעות בהם יש ילד בלי חברים בכל אחת מן הכיתות, ומחסם האיחוד מספיק לדבר על כיתה מסויימת, בלי הגבלת הכלליות כיתה 1.
נגדיר A_i עבור $1\leq i\leq n$ להיות המאורע שבו הילד i בכיתה 1 ללא חברים. A הוא המאורע בו קיים ילד ללא חברים בכיתה אחת.

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

כעת, מחסם האיחוד ומסימטריה, נובע

$$\mathbb{P}\left(A\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right) = n\mathbb{P}\left(A_1\right)$$

עבור $1 \leq j \leq n$, נסמן את B_j להיות המאורע בו ילד j בכיתה 2 חבר של ילד מספר 1 בכיתה 1. אזי

$$A_1 = \bigcap_{j=1}^{n} B_j^c$$

המאורעות B_j בלתי־תלויים (זהו מרחב מכפלה לפי הקשתות) ולכן

$$\mathbb{P}\left(A_1\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_j^c\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(1-p\right) = \left(1-p\right)^n$$

נציב חזרה ונקבל

$$\mathbb{P}\left(A\right) \quad \leq \quad n\mathbb{P}\left(A_1\right) = n\left(1-p\right)^n = n\left(1-\frac{\left(1+\varepsilon\right)\ln n}{n}\right)^n$$

כעת מהלמה החדוואית,

$$\mathbb{P}\left(A\right) \leq n\left(1-\frac{\left(1-\varepsilon\right)\ln n}{n}\right)^n \leq n \cdot e^{-\left(1+\varepsilon\right)\ln n} = \frac{n}{n^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{n^{\varepsilon}} \to 0$$

כנדרש.

2. במקום להראות את הדרישה נראה

$$\mathbb{P}\left(A^c\right) \to 0$$

מתקיים

$$A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$

המאורעות A_i בלתי־תלויים. לכן, מסימטריה,

$$\mathbb{P}\left(A^c\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i^c\right) = \left(\mathbb{P}\left(A_1^c\right)\right)^n = \left(1-\mathbb{P}\left(A_1\right)\right)^n = \left(1-\left(1-p\right)^n\right)^n$$

בשלב האחרון הצבנו את ההסתברות שראינו קודם. כעת משתמשים בסעיף ב של הלמה מחדווא.

■