

מבוא להסתברות

© ארזים

9 במרץ 2016

1 הכלה והדחה

משפט 1.1 יהיו A_1, \dots, A_n מאורעות.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

הוכחה: היזכר כי

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$$

נשתמש בכך על שני האגפים. עבור אגף שמאל:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^n A_i} \mathbb{P}(\omega)$$

ועבור אגף ימין:

$$\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \sum_{\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i} \mathbb{P}(\omega)$$

נראה את השוויון על ידי כך שנבחר $\omega \in \Omega$, ונראה שהסתברותו מופיעה אותה כמות פעמים (לאחר הסכימה) בשני הצדדים. נקבע $\omega \in \Omega$. אם $\omega \notin \bigcup_{i=1}^n A_i$, הסתברותו לא מופיעה באף אגף - ובפרט מופיעה אותו מספר פעמים בכל אגף. נאמר $\omega \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, והי

$$k = |\{i \in I : \omega \in A_i\}|, 1 \leq k \leq n$$

באגף שמאל, $\mathbb{P}(\omega)$ מופיעה בדיוק פעם אחת. באגף ימין, נברר באילו גורמים תופיע $\mathbb{P}(\omega)$. בחיתוך בו מופיעות בדיוק j קבוצות, כלומר

$|I| = j$, תימצא $\mathbb{P}(\omega)$ אם ורק אם כל j הקבוצות מכילות את ω . יש בדיוק $\binom{k}{j}$ קבוצות אינדקסים I שגודלן j וכל קבוצה בהן מכילות את ω . לכן באגף ימין, $\mathbb{P}(\omega)$ תקבל כמות פעמים השווה לביטוי הבא:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\} \wedge |I|=j \wedge \omega \in \bigcap_{i \in I} A_i} (-1)^{|I|-1} &= \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^{j-1} = (-1) \left(\sum_{k=0}^j \binom{k}{j} (-1)^j - 1 \right) = \\ &= (-1) \left((1-1)^k - 1 \right) = (-1) (0-1) = (-1) (-1) = 1 \end{aligned}$$

■

דוגמאות:

1. מגרילים מספר טבעי קטן מהמספר N באופן אחיד. מה הסיכוי שהמספר יתחלק באחד מבין 7, 10, 15?
נגדיר

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, \dots, N\} \\ \mathbb{P}(i) &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$

כמו כן, נסמן A_k המאורע בו המספר שהוגרל מתחלק במספר k . אנו מחפשים את

$$\mathbb{P}(A_7 \cup A_{10} \cup A_{15}) = ?$$

נתחיל בחישוב עבור מאורע יחיד:

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{N} = \frac{1}{N} \cdot \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$$

כמו כן, נשים לב שעבור שלמים l, k מתקיים

$$A_k \cap A_l = A_{\text{lcm}(k,l)}$$

כעת נשתמש בהכלה והדחה:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_7 \cup A_{10} \cup A_{15}) &= \mathbb{P}(A_7) + \mathbb{P}(A_{10}) + \mathbb{P}(A_{15}) - \mathbb{P}(A_7 \cap A_{10}) - \\ &- \mathbb{P}(A_{10} \cap A_{15}) - \mathbb{P}(A_7 \cap A_{15}) + \mathbb{P}(A_7 \cap A_{10} \cap A_{15}) = \\ &= \mathbb{P}(A_7) + \mathbb{P}(A_{10}) + \mathbb{P}(A_{15}) - \mathbb{P}(A_{70}) - \mathbb{P}(A_{30}) - \mathbb{P}(A_{105}) + \\ &+ \mathbb{P}(A_{210}) = \frac{1}{N} \left(\left\lfloor \frac{N}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{70} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{105} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{210} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

עבור N שמתחלק במספר 210, נקבל:

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} - \frac{1}{70} - \frac{1}{30} - \frac{1}{105} + \frac{1}{210} = \frac{9}{35}$$

2. נגדיל תמורה אחידה של המספרים $1, \dots, n$. כמה ההסתברות שלתמורה יש בדיוק k נקודות שבת?
 נתחיל מהמקרה $k = 0$. נגדיר A_k להיות המאורע בו לתמורה יש בדיוק k נקודות שבת. כעת נחפש את $\mathbb{P}(A_0)$.
 נעוד במרחב ההסתברות:

$$\Omega = \{f : \{1, \dots, n\} \leftrightarrow \{1, \dots, n\}\}$$

$$\mathbb{P}(i) = \frac{1}{n!}$$

עבור $1 \leq j \leq n$ נגדיר את המאורע B_j בו הנקודה j היא נקודת שבת, וכעת

$$A_0 = \bigcap_{j=1}^n B_j^c$$

כעת, לפי חוקי דה מורגן

$$\mathbb{P}(A_0^c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I} B_j\right)$$

נקבע $\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}$ ונחשב

$$P\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \frac{|\bigcap_{i \in I} B_i|}{n!} = \frac{(n - |I|)!}{n!}$$

שכן יש פשוט לסדר את האיברים שאינם נקודות שבת. לכן,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_0^c) &= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I} B_j\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \frac{(n - |I|)!}{n!} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\} \wedge |I|=j} (-1)^{j-1} \frac{(n - j)!}{n!} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \cdot \frac{(n - j)!}{n!} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \end{aligned}$$

לכן מתקיים

$$\mathbb{P}(A_0) = 1 - \mathbb{P}(A_0^c) = 1 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j!} = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \rightarrow \frac{1}{e}$$

נשים לב שנובע גם

$$|A_0| = n! \cdot \mathbb{P}(A_0) = n! \cdot \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$$

נחפש כעת את $\mathbb{P}(A_k)$ עבור $k \neq 0$. נגדיר J להיות כל תתי הקבוצות של $\{1, \dots, n\}$ בגודל k . לכן $|J| = \binom{n}{k}$. נגדיר מאורע $C_T, T \in J$, שבו נקודות השבת היחידות בתמורה הן איברי T . אזי מתקיים

$$A_k = \bigcup_{T \in J} C_T$$

וזהו איחוד של מאורעות זרים. לכן,

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{T \in J} \mathbb{P}(C_T) = \sum_{T \in J} \frac{|C_T|}{n!}$$

נותר לחשב את $|C_T|$. כמות זו היא למעשה כמות התמורות על שאר האיברים $(n - |T|)$ ללא נקודות שבת, ואת הכמות הזו כבר חישבנו:

$$|C_T| = (n - |T|)! \cdot \sum_{j=0}^{n-|T|} \frac{(-1)^j}{j!}$$

נציב ונקבל:

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{T \in J} \frac{(n - |T|)! \cdot \sum_{j=0}^{n-|T|} \frac{(-1)^j}{j!}}{n!}$$

$|T| = k$ ויש בסך הכל $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחירת T , ולכן נקבל:

$$\mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n - k)! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

אם כן, לכל $n, 0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

עבור k קבוע, ועבור n שואף לאינסוף:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_k) = \frac{e^{-1}}{k!}$$

התפלגות זו של כמות נקודות השבת נקראת התפלגות פואסון (Poisson) עם פרמטר אחד.

2 פעולות במרחבי הסתברות כלליים

2.1 מרחבי הסתברות מותנים

הגדרה 2.1 יהי (Ω, \mathbb{P}) מרחב הסתברות ויהי מאורע B שעבורו $\mathbb{P}(B) > 0$. נגדיר את מרחב ההסתברות המותנה במאורע B - זהו מרחב הסתברות עם אותו מרחב מדגם Ω ועם פונקציית הסתברות חדשה $\mathbb{P}(* | B)$ המקיימת

$$\mathbb{P}(\omega | B) = \begin{cases} 0 & \omega \notin B \\ \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(B)} & \omega \in B \end{cases}$$

נבדוק שזהו אכן מרחב הסתברות. צריך להראות שהפונקציה $\mathbb{P}(* | B)$ מקבלת ערכים אי שליליים, וכן שהיא מקיימת

$$\sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\omega | B)$$

בבירור מתקיים שהתוצאות אי שליליות, ההסתברות הינשה הייתה אי שלילית. כמו כן,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega | B) = \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\omega | B) = \sum_{\omega \in B} \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \cdot \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\omega) = 1$$

לכן זהו אכן מרחב הסתברות, ולכן כל התוצאות שראינו על מרחבי הסתברות כלליים תקפות גם כאן. למשל:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 | B) = \mathbb{P}(A_1 | B) + \mathbb{P}(A_2 | B) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | B)$$