מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

8 ביוני 2016

ניזכר במשפט הארגודי לשרשראות מרקוב, אותו ראינו ונוכיח:

משפט 0.1 תהי שרשרת מרקוב היא אי פריקה וחסרת מחזור בעלת התפלגות סטציונרית π. אזי לכל התפלגות התחלתית μ ולכל מצב $x \in S$ מתקיים

$$\mathbb{P}_\mu\left(X_t = x\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi\left(x\right)$$

למה 0.2 (למת המפתח) עבור שרשרת מרקוב אי פריקה וחסרת מחזור, קיים r כך שלכל $x, y \in S$

$$\mathbb{P}_x\left(X_r = y\right) > 0$$

נזדקק ללמה מתורת המספרים (לכו קחו את הקורס):

למה 0.3 תהי T קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים כך שמתקיים $\gcd\left(T\right) = 1$. אזי קיים $n_0 > 0$ שלם כך שלכל $n \geq n_0$, נוכל לכתוב

$$n = a_1 t_1 + \cdots + a_m t_m$$

כאשר $a_i > 0$ לכל i, וכן $t_i \in T$ לכל i.

דוגמה עבור $T = \{5, 7\}$, המספרים שנוכל לכתוב הם

$$0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, \ldots$$

נוכל לבחור $n_0 = 24$ ולקבל את הנדרש.

הוכחה: ראשית, אפשר להניח כי T סופית, משום שבתוך T תמיד יש קבוצה סופית שעבורה המחלק המשותף הגדול ביותר הוא 1. אכן, יהי $a_0 \in T$. אם $a_0 = 1$ אזי הקבוצה $\{1\} \subseteq T$, ועבורה המחלק המשותף המקסימלי הוא 1. אם לא, אז לכל מספר $1 < d \leq a_0$, קיים בקבוצה T מספר a_d שאינו מתחלק בו, כלומר $d \nmid a_d$, כי $\gcd\left(T\right) = 1$. ניקח את הקבוצה $\{a_0, a_2, \ldots, a_{a_0}\}$, ולפי הגדרה נקבל שהמחלק המשותף המקסימלי הוא 1.

כעת, נרשום $T=\{t_1,\dots,t_n\}$. אזי קיימים $a_1,\dots,a_n$ שלמים כך שמתקיים $1=a_1t_1+\cdots+a_nt_n$. נוכיח זאת: נסמן r את המספר הטבעי הנמוך ביותר כך שקיימים $a_1,\dots,a_n$ כך שמתקיים $r=a_1t_1+\cdots+a_nt_n$. נרצה להראות כי $r=1$. נניח בשלילה כי $r>1$. כיוון שמתקיים $\gcd(T)=1$, נובע שקיים t_i כך שמתקיים $r\nmid t_i$. בלי הגבלת הכלליות, $i=1$. נרשום $t_1=k\cdot r+s$, עבור k שלם, $0<s<r$. כעת, $s=t_1-k\cdot r=t_1-k\left(a_1t_1+\cdots+a_nt_n\right)=\left(1-ka_1\right)t_1-ka_2t_2-\cdots-ka_nt_n$. קיבלנו שניתן להציג את s כצירוף בשלמים של איברי t, למרות שמתקיים $s<r$ ־ בסתירה למינימליות r. לכן $r=1$.

כעת נותר רק להראות את הטענה מהלמה. יהי n טבעי. על ידי הכפלת הייצוג של 1 בקבוע n נקבל $n=b_1t_1+\cdots+b_mt_m$ עבור שלמים $b_1,\dots b_m$ כלשהם. נבחין כי עבור כל $k_2,\dots,k_m$ שלמים,

$$n=\left(b_1-k_2t_2-\cdots-k_mt_m\right)t_1+\left(b_2+k_2t_1\right)t_2+\cdots+\left(b_m+k_mt_1\right)t_m$$

בצורה זו נוכל לבחור את $k_2,\dots,k_m$ כך שמתקיים

$$n=c_1t_1+\cdots+c_mt_m$$

וכן $0\le c_2,\dots,c_m\le t_1-1$. מכאן,

$$\begin{aligned} n &\le c_1t_1+(t-1)\left(t_2+\cdots+t_m\right)\\ c_1t_1 &\ge n-\left(t_1-1\right)\left(t_2+\cdots+t_m\right)\end{aligned}$$

נבחר $n_0=\left(t_1-1\right)\left(t_2+\cdots+t_m\right)$. כעת לכל $n\ge n_0$, אגף ימין אי שלילי, וכן t_1 טבעי, לכן c_1 אי שלילי. בסך הכל קיבלנו ייצוג כדרוש. ■

בעזרת למה זו נוכל להוכיח את למת המפתח: **הוכחה:** לכל $x\in S$, $\gcd\left(T\left(x\right)\right)=1$. לכן, מהלמה מתורת המספרים, קיים $n_{0,x}$ כך שלכל $n\ge n_{0,x}$ מקיים $n\in T\left(x\right)$ (שכן אם $t_1,t_2\in T\left(x\right)$ אזי $t_1+t_2\in T\left(x\right)$). כעת, נגדיר

$$n_0=\max_{x\in S}n_{0,x}$$

כעת, לכל $n\ge n_0$ ולכל $x\in S$, $n\in T\left(x\right)$. כעת, מאי פריקות, לכל $x,y\in S$ קיים $t_{x,y}\ge 1$ כך שמתקיים $\mathbb{P}\left(X_{t_{x,y}}=y\right)>0$. נגדיר

$$\bar{t}=\max_{x,y\in S}t_{x,y}$$

וכעת נגדיר $r=\bar{t}+n_0$. כעת, לכל $x,y\in S$, נגיע מהמצב x אל המצב y תוך $t_{x,y}$ צעדים. מתקיים $t_{x,y}\le\bar{t}$. כעת, נרצה "לבזבז" $r-t_{x,y}$ צעדים, ולהישאר במצב y. מתקיים $r-t_{x,y}\ge r-\bar{t}=n_0$, ולכן $r-t_{x,y}\in T\left(y\right)$, ולכן ניתן להגיע מהמצב x למצב y בהסתברות חיובית. ■

כעת אנחנו מוכנים ומזומנים להוכיח את המשפט הארגודי. **הוכחה:** נחשוב על שרשרת המרקוב שנעה r צעדים של השרשרת המקורית בכל צעד.

טענה 0.4 נגדיר מטריצת הסתברות מעבר $E(x,y)=\pi(y)$ לכל $x,y\in S$.

1. לכל מטריצת הסתברות מעבר Q מתקיים $Q\cdot E=E$.
2. לכל מטריצת הסתברות מעבר Q כך שההתפלגות π היא התפלגות סטציונרית שלה, $E\cdot Q=E$.

הוכחה: נוכיח על ידי חישוב.

1.

$$(Q\cdot E)_{x,y}=\sum_{z\in S}Q(x,z)\,E(z,y)=\sum_{z\in S}Q(x,z)\,\pi(y)=\pi(y)\sum_{z\in S}Q(x,z)=\pi(y)$$

2. נקבע $x\in S$. לפי הגדרה, השורה x במטריצה $E\cdot Q$ היא מכפלת השורה x של המטריצה E במטריצה Q. כלומר, השורה הזו היא $\pi\cdot Q$, ומהגדרת התפלגות סטציונרית נקבל $\pi\cdot Q=\pi$, וקיבלנו את הנדרש.

■

כעת, לפי למת המפתח, נקבל r שמקיים לכל $x,y\in S$

$$P^r(x,y)=\mathbb{P}_x(X_r=y)>0$$

לכן, קיים $0<\delta<1$ כך שלכל x,y מתקיים

$$P^r(x,y)\geq\delta\pi(y)$$

במילים אחרות, כל איברי המטריצה $P^r-\delta\cdot E$ הם אי שליליים.

$$P^r=\delta\cdot E+(1-\delta)\,R$$

כך נגדיר את R. נקבל כי R מטריצת הסתברויות מעבר. ראינו שכל איבריה אי שליליים, וכן לכל $x\in S$ מתקיים

$$\sum_{y\in S}R(x,y)=\sum_{y\in S}\frac{P^r(x,y)-\delta E(x,y)}{1-\delta}=\sum_{y\in S}\frac{1-\delta}{1-\delta}=1$$

טענה 0.5 לכל $k\geq 1$, מתקיים

$$P^{k\cdot r}=\left(1-(1-\delta)^k\right)E+(1-\delta)^k R^k$$

הוכחה: עבור $k=1$, זוהי הגדרת R. נמשיך באינדוקציה.

$$\begin{aligned}
P^{kr} &= P^{(k-1)r}\cdot P^{r}=\left(\left(1-(1-\delta)^{k-1}\right)E+(1-\delta)^{k-1}R^{k-1}\right)\cdot P^{r}= \\
&= \left(1-(1-\delta)^{k-1}\right)E+(1-\delta)^{k-1}R^{k-1}\left(\delta E+(1-\delta)R\right)= \\
&= \left(1-(1-\delta)^{k-1}\right)E+\delta(1-\delta)^{k-1}E+(1-\delta)^{k}R^{k}= \\
&= \left(1-(1-\delta)^{k-1}+\delta(1-\delta)^{k-1}\right)E+(1-\delta)^{k}R^{k}= \\
&= \left(1-(1-\delta)^{k-1}(1-\delta)\right)E+(1-\delta)^{k}R^{k} \\
&= \left(1-(1-\delta)^{k}\right)E+(1-\delta)^{k}R^{k}
\end{aligned}$$

■

לסיום, יהי $t\geq 1$ שלם, ונרשום $t=k\cdot r+s$, $0\leq s\leq r$. אזי

$$\begin{aligned}
P^{t} &= P^{kr+s}=P^{kr}\cdot P^{s}=\left(\left(1-(1-\delta)^{k}\right)E+(1-\delta)^{k}R^{k}\right)P^{s}= \\
&= \left(1-(1-\delta)^{k}\right)E+(1-\delta)^{k}R^{k}P^{s}
\end{aligned}$$

נשים לב כי מכאן,

$$P^{t}-E=(1-\delta)^{k}\left(R^{k}P^{s}-E\right)$$

לכן, לכל $x,y\in S$, נקבל

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}_{x}\left(X_{t}=y\right)-\pi(t)\right| &= \left|P^{t}(x,t)-E(x,y)\right|=(1-\delta)^{k}\left|\left(R^{k}\cdot P^{s}\right)(x,y)-E(x,y)\right|\leq \\
&\leq (1-\delta)^{k}\xrightarrow[t\to\infty]{}0
\end{aligned}$$

■