

מבוא להסתברות

© ארזים

15 במאי 2016

1 שונות של סכום של משתנים מקריים

טענה 1.1 אם X, Y בעלי שונות סופית אזי

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

באופן כללי, אם X_1, \dots, X_n בעלי שונות סופית, אזי

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

הוכחה: באינדוקציה, בעל שונות סופית. נחשב:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) &= \mathbb{E} \left((X_1 + \dots + X_n - \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n))^2 \right) = \\ &= \mathbb{E} \left((X_1 - \mathbb{E}(X_1) + \dots + X_n - \mathbb{E}(X_n))^2 \right) = \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i))^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j)) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

■

מסקנה 1.2 אם X_1, \dots, X_n בעלי שונות סופית ובלתי-תלויים אזי

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

דוגמה משתנים בלתי מתאומים אבל תלויים:

$$X \sim \begin{cases} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{cases}, X^2 \sim \begin{cases} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{cases}$$

המשתנים הללו אינם בלתי תלויים, אבל הם בלתי-מתאומים:

$$\text{Cov}(X, X^2) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(X^2) = 0$$

וזאת משום שמתקיים $X^3 = X$, $\mathbb{E}(X) = 0$

דוגמה X_1, \dots, X_n בלתי תלויים ושווי התפלגות כך שמתקיים

$$X_1 \sim \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{cases}$$

כעת, ברור כי

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) &= 0 \\ \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) &= n \cdot \text{Var}(X_1) = n \end{aligned}$$

סטיית התקן של הסכום היא \sqrt{n} .

דוגמה

$$\begin{aligned} Y &\sim \text{Bin}(n, p) \\ \mathbb{E}(Y) &= np \\ \text{Var}(Y) &= np(1-p) \end{aligned}$$

נוכיח את השונות: נגדיר X_1, \dots, X_n בלתי תלויים ושווי התפלגות, כך שמתקיים

$$X_1 \sim \text{Ber}(p)$$

כעת, $X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ מהמסקנה,

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot \text{Var}(X_1) = n \cdot p(1-p)$$

2 מקדם מתאם

עבור משתנים מקריים X, Y בעלי שונות סופית ולא קבועים, נגדיר את מקדם המתאם שלהם:

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Std}(X) \cdot \text{Std}(Y)}$$

2.1 תכונות

$$1. \rho(X, Y) = \rho(Y, X)$$

$$2. \text{לכל } a \text{ ממשי, } \rho(X + a, Y) = \rho(X, Y), \rho(aX, Y) = \frac{a}{|a|} \rho(X, Y) \text{ (} a \neq 0 \text{)}$$

$$3. \rho(X, X) = 1$$

$$4. \rho(X, Y) = 0 \iff \text{Cov}(X, Y) = 0$$

משפט 2.1 מתקיים:

$$1. |\rho(X, Y)| \leq 1$$

2. ערכי קצה:

$$\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1 \text{ אם } \rho(X, Y) = 1 \text{ אזי קיימים } a > 0, b \text{ ממשיים כך שמתקיים } \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$$

$$\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1 \text{ אם } \rho(X, Y) = -1 \text{ אזי קיימים } a < 0, b \text{ ממשיים כך שמתקיים } \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$$

הוכחה: נוכיח מקרה פרטי. להסיק את המקרה הכללי - תרגיל. נניח כי

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(Y) = 0 \\ \text{Var}(X) &= \text{Var}(Y) = 1 \end{aligned}$$

כעת נוכיח את הסעיף הראשון:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}((X - Y)^2) = \mathbb{E}(X^2 + Y^2 - 2XY) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(XY) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) \\ &= 2 - 2\text{Cov}(X, Y) \\ 1 &\leq \text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

כדי לקבל את האי שוויון $\text{Cov}(X, Y) \geq -1$ נתחיל עם $\mathbb{E}((X + Y)^2)$.

הסעיף השני: בהוכחה של הסעיף הראשון ראינו ששוויון לאחת מתקבל אם ורק אם $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. זה החלק הראשון - החלק השני מתקבל באותה צורה, עם מינוס אחת, $\mathbb{P}(X = -Y) = 1$. ■

3 אי שוויון מרקוב

אם X משתנה מקרי אי שלילי אז לכל $t > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$