מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

1 במאי 2016

הראינו כי התוחלת של משתנה מקרי X שווה לערך הטור:

$$\mathbb{E}X=\sum_{x}\mathbb{P}\left(X=x\right)\cdot x$$

מסקנה מנוסחא זו:

מסקנה 0.1 התוחלת של X ניתנת לחישוב מהתפלגות X.

דוגמאות

1. התפלגות ברנולי:

$$\begin{aligned} X & \sim \begin{cases} 1 & p\\ 0 & 1-p \end{cases}\\ \mathbb{E}\left(X\right) & = p\cdot1+\left(1-p\right)\cdot0=p \end{aligned}$$

בפרט, אם A מאורע, אזי

$$\mathbb{E}\left(1_{A}\right)=\mathbb{P}\left(A\right)$$

2. התפלגות גיאומטרית:

$$\begin{aligned} X & \sim \begin{cases} p\left(1-p\right)^{k-1} & k\in\mathbb{N}\backslash\left\{ 0\right\} \end{cases}\\ \mathbb{E}\left(X\right) & = \sum_{k=1}^{\infty}p\left(1-p\right)^{k-1}\cdot k=\sum_{k=1}^{\infty}p\left(1-p\right)^{k-1}\left(k-1\right)+\sum_{k=1}^{\infty}p\left(1-p\right)^{k-1}=\sum_{m=1}^{\infty}p\left(1-p\right)^{m}\cdot m+1=\\ & = \left(1-p\right)\sum_{m=1}^{\infty}p\left(1-p\right)^{m-1}\cdot m+1=\left(1-p\right)\mathbb{E}\left(X\right)+1\Rightarrow\mathbb{E}\left(X\right)=\frac{1}{p} \end{aligned}$$

מקרה פרטי - $X\sim\mathrm{Geom}\left(\frac{1}{2}\right)$⇐$\mathbb{E}\left(X\right)=2$.

3. התפלגות פואסון:

$$\begin{aligned} X &\sim \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} & k\in\mathbb{N} \end{cases} \\ \mathbb{E}\left(X\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda \end{aligned}$$

4. התפלגות בינומית:

$$\begin{aligned} X &\sim \begin{cases} \binom{n}{k}\cdot p^k\left(1-p\right)^{n-k} & 0\le k\le n \end{cases} \\ \mathbb{E}\left(X\right) &= np \end{aligned}$$

הומגניות ולינאריות התוחלת

משפט 0.2 (הומוגניות) יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת מוגדרת, ויהי c מספר ממשי. אזי התוחלת של $c\cdot X$ מוגדרת, ומתקיים $\mathbb{E}\left(c\cdot X\right)=c\cdot\mathbb{E}\left(X\right)$ (מניחים כאן $0\cdot\infty=0$).

משפט 0.3 (לינאריות) יהיו X,Y משתנים מקריים. אזי

$$\mathbb{E}\left(X+Y\right)=\mathbb{E}\left(X\right)+\mathbb{E}\left(Y\right)$$

כאשר אגף ימין מוגדר.

נשתמש בזאת כדי לחשב את התוחלת של משתנה בינומי, ונוכיח את המשפטים בשיעור הבא:
יהיו $X_1,\ldots,X_n\sim\mathrm{Ber}\left(p\right)$ באופן בלתי תלוי. יהי $X=X_1+\cdots+X_n$. אזי $X\sim\mathrm{Bin}\left(n,p\right)$. מלינאריות, מתקיים

$$\mathbb{E}\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right)=n\cdot p$$