מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

18 באפריל 2016

ראינו את משפט ההתכנסות של התפלגות בינומית להתפלגות פואסון בצורה הבאה:

משפט 0.1 לכל n, יהיו $X_1^n, \ldots, X_n^n$ משתנים מקריים בלתי־תלויים המקיימים $X_i^n \sim \mathrm{Ber}\left(p_n\right)$. אם $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ עבור $\lambda > 0$, אזי לכל k קבוע,

$$\mathbb{P}\left(X_1^n + \cdots + X_n^n = k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}\left(Z = k\right)$$

עבור $Z \sim \mathrm{Poi}\left(\lambda\right)$.

נראה הוכחה אלטרנטיבית באמצעות צימודים. **הוכחה:** בשיעור הקודם ראינו שלכל $0 < p \leq 1$ קיים מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ ומשתנים מקריים X, Y עליו, כך שמתקיים:

1. $X \sim \mathrm{Ber}\left(p\right), Y \sim \mathrm{Poi}\left(p\right)$
2. $\mathbb{P}\left(X \neq Y\right) \leq p^2$

נעזר בשתי למות שהוכחתן היא תרגיל:

למה 0.2 אם X משתנה מקרי על מרחב הסתברות $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$, Y משתנה מקרי על מרחב הסתברות $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$, כאשר X, Y מקבלים ערכים בקבוצה S, וכן $f: S \to S'$ עבור קבוצה S' כלשהי, אזי

$$X \overset{d}{=} Y \Rightarrow f\left(X\right) \overset{d}{=} f\left(Y\right)$$

תזכורת $X \overset{d}{=} Y$ אם לכל $s \in S$ מתקיים $\mathbb{P}\left(X = s\right) = \mathbb{P}\left(Y = s\right)$.

למה 0.3 יהיו X, Y משתנים מקריים. אזי לכל k קבוע,

$$\left|\mathbb{P}\left(X = k\right) - \mathbb{P}\left(Y = k\right)\right| \leq \mathbb{P}\left(X \neq Y\right)$$

נמשיך להוכחה האלטרנטיבית של המשפט.

נקבע n. יהי $(\Omega^n, \mathbb{P}^n)$ מרחב הסתברות כמו בצימוד, עבור $p = p_n$. כלומר, מרחב שעליו זוג משתנים מקריים X^n, Y^n כך שמתקיים:

1. $X^n \sim \mathrm{Ber}(p), Y^n \sim \mathrm{Poi}(p)$
2. $\mathbb{P}^n(X^n \neq Y^n) \leq p^2$

ניקח מרחב מכפלה של n עותקים של מרחב ההסתברות הזה, כלומר

$$(\Omega, \mathbb{P}) = \bigotimes_{i=1}^{n} (\Omega^n, \mathbb{P}^n)$$

על מרחב זה מוגדרים n זוגות (X^n, Y^n) בלתי־תלויים, כלומר מוגדרים

$$\begin{gathered} X_1^n, \ldots, X_n^n \\ Y_1^n, \ldots, Y_n^n \end{gathered}$$

כך שהזוגות $(X_1^n, Y_1^n), \ldots, (X_n^n, Y_n^n)$ בלתי־תלויים, וכן לכל i מתקיים:

1. $X^n \sim \mathrm{Ber}(p), Y^n \sim \mathrm{Poi}(p)$
2. $\mathbb{P}^n(X^n \neq Y^n) \leq p^2$

נזכר מהשיעור שעבר שאם $Z_1 \sim \mathrm{Poi}(\mu_1), Z_2 \sim \mathrm{Poi}(\mu_2)$, וכן הם בלתי־תלויים, אזי $Z_1 + Z_2 \sim \mathrm{Poi}(\mu_1 + \mu_2)$. לכן

$$Y_1^n + \cdots + Y_n^n \sim \mathrm{Poi}(np_n)$$

לשם הפשטות נוכיח את המשפט עבור המקרה הפרטי $p_n = \frac{\lambda}{n}$, ואז

$$Y_1^n + \cdots + Y_n^n \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$$

נשים לב גם שמתקיים

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1^n + \cdots + X_n^n \neq Y_1^n + \cdots + Y_n^n) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (X_n \neq Y_n)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) \leq \\ &\leq np_n^2 = \frac{\lambda^2}{n} \end{aligned}$$

מהלמה השנייה שראינו קודם, לכל k מתקיים

$$|\mathbb{P}(X_1^n + \cdots + X_n^n = k) - \mathbb{P}(Y_1^n + \cdots + Y_n^n)| \leq \frac{\lambda^2}{n}$$

ניזכר שסכום Y_i^n מתפלג פואסון, כלומר

$$\mathbb{P}(Y_1^n + \cdots + Y_n^n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ובפרט,

$$(*)\quad \mathbb{P}\left(X_1^n+\cdots+X_n^n=k\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

כפי שרצינו.

הערה 0.4 ראינו שהגבול $(*)$ מתקיים במרחב המכפלה עבור המשתנים המקריים (X_i^n) ששם. במשפט מדובר על (X_i^n) שמוגדרים במרחב עלשהו. האם גם עבורם הגבול $(*)$ מתקיים?
כן! לפי למה 1. ההתפלגות המשותפת של $(X_1^n,\ldots,X_n^n)$ זהה במרחב המכפלה ועל מרחב ההסתברות שבמשפט (כל קואורדינטה מתפלגת $\mathrm{Ber}\left(p_n\right)$ והקואורדינטות בלתי־תלויות).
כעת, עבור $f\left(\left(X_1,\ldots,X_n\right)\right)=X_1+\cdots+X_n$, מתקיים

$$f\left(\left(X_1^n,\ldots,X_n^n\right)\right)=X_1^n+\cdots+X_n^n$$

ולכן, לפי הלמה, הסכום במשפט מתפלג כמו הסכום במרחב שלנו.

בכך סיימנו את ההוכחה האלטרנטיבית למשפט ההתכנסות. ■

1 תוחלת

<u>התוחלת</u> של משתנה מקרי X מגודרת, באופן לא לחלוטין פורמלי עדיין, בתור

$$\mathbb{E}\left(X\right)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\cdot X\left(\omega\right)$$

דוגמאות

1. X הוא תוצאת הטלת קובייה. $\mathbb{E}\left(X\right)=3.5$. אכן, ניתן למדל:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}\\ \mathbb{P}\left(\omega\right) &= \frac{1}{6}\quad\forall\omega\in\Omega\\ X &: \Omega\to\mathbb{R}, X\left(i\right)=i\\ \mathbb{E}\left(X\right) &= \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\cdot X\left(\omega\right)=3.5\end{aligned}$$

2. מטילים מטבע עם הסתברות $\frac{1}{3}$ לעץ פעמיים. יהי Y כמות העצים שהתקבלו. $\mathbb{E}\left(Y\right)=\frac{2}{3}$. אכן, נמדל:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left\{ \left(h,h\right),\left(h,t\right),\left(t,h\right),\left(t,t\right)\right\} \\
\mathbb{P} &= \left\{ \frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right\} \\
Y &: \Omega\to\mathbb{R},Y\left(\left(\omega_{1},\omega_{2}\right)\right)=\text{number of }h\text{ in }\omega_{1},\omega_{2} \\
\mathbb{E}\left(Y\right) &= \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\left(\omega_{1},\omega_{2}\right)\right)\cdot X\left(\left(\omega_{1},\omega_{2}\right)\right)=\frac{1}{9}\cdot2+\frac{2}{9}\cdot1+\frac{2}{9}\cdot1+\frac{4}{9}\cdot0=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

הגדרה 1.1 יהי X משתנה מקרי אי־שלילי, כלומר $X\left(\omega\right)\geq0$ לכל $\omega\in\Omega$. אזי

$$\mathbb{E}X:=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\cdot X\left(\omega\right)$$

כאשר ייתכן שמתקיים $\mathbb{E}X=\infty$, אבל היא עדיין מוגדרת.

דוגמא ניקח

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left\{ 1,2,3,\dots\right\} \\
\mathbb{P}\left(k\right) &= \frac{1}{2^{k}} \\
X\left(k\right) &= 2^{k} \\
\mathbb{E}X &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(k\right)\cdot X\left(k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k}}2^{k}=\infty
\end{aligned}$$

הגדרה 1.2 יהי X משתנה מקרי. נגדיר משתנים מקריים חדשים X^{+},X^{-}, שנקראים <u>החלק החיובי</u> של X <u>והחלק השלילי</u> של X, בהתאמה, על ידי

$$\begin{aligned}
X^{+} &= \begin{cases}
X\left(\omega\right) & X\left(\omega\right)\geq0\\
0 & \text{otherwise}
\end{cases} \\
X^{-} &= \begin{cases}
-X\left(\omega\right) & X\left(\omega\right)\leq0\\
0 & \text{otherwise}
\end{cases}
\end{aligned}$$

בהגדרה זו שני המשתנים המקריים אי־שליליים, וכן $X=X^{+}-X^{-},\left|X\right|=X^{+}+X^{-}$.

הגדרה 1.3 (תוחלת) יהי X משתנה מקרי.

1. (תוחלת סופית) אם $\mathbb{E}X^{+}<\infty,\mathbb{E}X^{-}<\infty$, אזי $\mathbb{E}X:=\mathbb{E}X^{+}-\mathbb{E}X^{-}$, ובמקרה זה מתקיים גם

$$\mathbb{E}X=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\cdot X\left(\omega\right)$$

וטור זה מתכנס בהחלט.

2. (תוחלת אינסופית) אם $\mathbb{E}X^{+}=\infty,\mathbb{E}X^{-}<\infty$, נגדיר $\mathbb{E}X=\infty$.
באותו אופן, אם $\mathbb{E}X^{+}<\infty,\mathbb{E}X^{-}=\infty$, נגדיר $\mathbb{E}X=-\infty$.

3. (תוחלת לא מוגדרת) אם $\mathbb{E}X^{+}=\infty,\mathbb{E}X^{-}=\infty$, נאמר שהתוחלת של X אינה מוגדרת.

יש להוכיח שאם $\mathbb{E}X^{+}<\infty,\mathbb{E}X^{-}<\infty$, אזי הטור $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\cdot X\left(\omega\right)$ מתכנס בהחלט לגבול $\mathbb{E}X^{+}-\mathbb{E}X^{-}$. גם בכיוון השני, אם $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\cdot X\left(\omega\right)$ מתכנס בהחלט, אזי הסכום הוא $\mathbb{E}X^{+}-\mathbb{E}X^{-}$, ושני הגורמים סופיים. **הוכחה:** נזכר שסכום של שני טורים מתכנסים בהחלט גם הוא מתכנס בהחלט. לכן,

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\cdot X\left(\omega\right) &= \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\left(X^{+}\left(\omega\right)-X^{-}\left(\omega\right)\right)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)X^{+}\left(\omega\right)-\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)X^{-}\left(\omega\right)=\\ &= \mathbb{E}X^{+}-\mathbb{E}X^{-}\end{aligned}$$

מכאן נובע הכיוון הראשון.
בכיוון השני, אם הטור מכתנס בהחלט, נוכל לכתוב

$$\infty>\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\left|X\left(\omega\right)\right|=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)X^{+}\left(\omega\right)+\mathbb{P}\left(\omega\right)X^{-}\left(\omega\right)=\mathbb{E}X^{+}+\mathbb{E}X^{-}$$

ולכן בפרט $\mathbb{E}X^{+}<\infty,\mathbb{E}X^{-}<\infty$, ולכן ניתן להפעיל את החלק הראשון כדי לקבל את השוויון בטענה. ■

כעת נוכיח שהתוחלת של X תלוייה רק בהתפלגות של X ולא באופן שבו X מוגדר על מרחב ההסתברות.

טענה 1.4 אם X משתנה מקרי אי־שלילי, אז

$$\mathbb{E}X=\sum_{x}\mathbb{P}\left(X=x\right)\cdot x$$

הוכחה: עבור x נבחים כי

$$\left\{X=x\right\}=\left\{\omega\in\Omega\mid X\left(\omega\right)=x\right\}$$

ולכן (אנחנו מצטמצמים לכדי $x\geq0$ שכן X אי־שלילי)

$$\begin{aligned}\sum_{x\geq0}\mathbb{P}\left(X=x\right)\cdot x &= \sum_{x\geq0}\left(\sum_{\omega\in\Omega,X\left(\omega\right)=x}\mathbb{P}\left(\omega\right)\right)\cdot x=\sum_{x\geq0}\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\cdot x\cdot1_{X\left(\omega\right)=x}=\\ &= \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{x\geq0}\mathbb{P}\left(\omega\right)\cdot x\cdot1_{X\left(\omega\right)=x}=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega\right)\cdot X\left(\omega\right)=\mathbb{E}X\end{aligned}$$

וזאת משום שמותר להחליף סדר סכימה בטור אי־שלילי. ■

טענה 1.5 אם X משתנה מקרי בעל תוחלת סופית, אז

$$\mathbb{E}X = \sum_x \mathbb{P}\left(X = x\right) \cdot x$$

והטור מתכנס בהחלט. גם בכיוון השני, אם

$$\sum_x \mathbb{P}\left(X = x\right) \cdot x$$

מתכנס בהחלט, אזי $\mathbb{E}X$ סופית ושווה לסכום הטור.

הוכחה: מהטענה הקודמת,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^+ &= \sum_x \mathbb{P}\left(X^+ = x\right) \cdot x = \sum_{x \geq 0} \mathbb{P}\left(X = x\right) \cdot x \\ \mathbb{E}X^- &= \sum_x \mathbb{P}\left(X^- = x\right) \cdot x = \sum_{x \leq 0} \mathbb{P}\left(X = x\right) \cdot (-x)\end{aligned}$$

כיוון ראשון: אם $\mathbb{E}X$ סופית, אזי $\mathbb{E}X^+, \mathbb{E}X^-$ סופיות, ולכן הטורים מתכנסים בהחלט וניתן לרשום

$$\sum_x \mathbb{P}\left(X = x\right) \cdot x = \sum_{x \geq 0} \mathbb{P}\left(X = x\right) \cdot x - \sum_{x \leq 0} \mathbb{P}\left(X = x\right) \cdot (-x) = \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^- = \mathbb{E}X$$

שכן סכום של טורים מתכנסים בהחלט מתכנס בהחלט.
כיוון שני:

$$\sum_x \mathbb{P}\left(X = x\right) \cdot |x| = \sum_{x \geq 0} \mathbb{P}\left(X = x\right) \cdot x + \sum_{x \leq 0} \mathbb{P}\left(X = x\right) \cdot (-x) = \mathbb{E}X^+ + \mathbb{E}X^-$$

לכן, אם

$$\sum_x \mathbb{P}\left(x\right) \cdot x$$

מתכנס בהחלט, אזי $\mathbb{E}X^+, \mathbb{E}X^-$ סופיות, וניתן להשתמש בכיוון הראשון כדי לקבל את השוויון בטענה. ■