מבוא להסתברות

© ארזים

13 באפריל 2016

ראינו בשיעור שעבר מספר התפלגויות נפוצות, וכן את עיקרון "חוק המספרים הקטנים" - אם נבצע סדרת ניסויים, שבכל אחד מהם סופרים את ההצלחות בהרבה ניסיונות בלתי־תלויים (או כמעט בלתי־תלויים), ונניח שממוצע כמות ההצלחות נותר קבוע בין הניסויים, ושכמות הניסיונות בכל ניסוי הולכת וגדלה, אזי כמות ההצלחות מתכנסת למשתנה פואסוני.

ראינו גם משפט:

משפט 0.1 (התכנסות התפלגות בינומית לפואסונית) אם (p_n) סדרת הסתברויות המקיימת

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$$

עבור $\lambda > 0$ כלשהו, אזי $\text{Bin}(n,p_n) \to \text{Poi}(\lambda)$. כלומר, לכל k קבוע,

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

דוגמא נערוך סדרת ניסויים. בניסוי n נקיים n נסיונות בלתי־תלויים, שכל אחד מצליח בהסתברות $\frac{1}{n}$. יהי $(X_i^n)_{i=1}^n$ משתנה מקרי ששווה אחד אם הניסיון i בניסוי n הצליח, ושווה 0 אחרת. אזי, לכל k קבוע,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_1^n + X_2^n + \ldots + X_n^n = k\right) = e^{-1} \cdot \frac{1}{k!}$$

מדוע הדוגמא היא מקרה פרטי של המשפט?

משום שלכל n, $X_i^n \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{n}\right)$ לכל i, ולכן מתקיים

$$X_1^n + \ldots + X_n^n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{n}\right)$$

וכן מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1 = \lambda$$

הוכחה: (משפט ההתכנסות הבינומית) נקבע $k \geq 0$ שלם. נרשום

$$\binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k}$$

כעת,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot p_n^k &= \lim_{n\to\infty} (np_n)^k \cdot \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} = \\
&= \lim_{n\to\infty} (np_n)^k \cdot 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (np_n)^k \cdot \lim_{n\to\infty} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \\
&= \lambda^k \cdot 1 = \lambda^k
\end{aligned}$$

נוכיח כעת כי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}$$

ניזכר בלמה מחדווא:

למה 0.2 מתקיים:

1. לכל p, מתקיים $1-p \leq e^{-p}$.
2. לכל $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$, מתקיים $1-p \geq e^{-p-2p^2}$.

ראשית מתקיים $(1-p_n)^{n-k} = \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k}$, ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0$$

שכן כשכופלים אותו בסדרה ששואפת לאינסוף (n) מקבלים גבול סופי, וכן k קבוע, ולכן

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^k = 1$$

כעת מספיק להראות שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^n = e^{-\lambda}$$

נשתמש בכלל הסנדוויץ':

$$(1-p_n)^n \leq e^{-np_n} \to e^{-\lambda}$$

כעת מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty} np_n^2 = 0$$

ולכן מתקיים גם, לפחות החל ממקום מסויים,

$$(1-p_n)^n \geq e^{-np_n - 2np_n^2} \to e^{-\lambda}$$

ולכן הוכחנו את המשפט. ■

0.1 דיון על התפלגות פואסונית בטבע

נתמקד בדוגמא של כמות שיחות למרכזיה בשעה. בשעה נכנסות בממוצע $\lambda = 100$ למרכזיה. נחלק את השעה שלנו לחלקים - 3600 שניות. בכל שנייה, נכנסת שיחה בהסתברות $\frac{100}{3600}$ באופן בלתי תלוי.

במודל זה יש פגמים:

1. הוא לא לוקח בחשבון את האפשרות שתכנסנה כמה שיחות בשנייה.
2. המספר 3600 לא מיוחד אם קשור לנתונים.

באופן כללי יותר, אפשר לחלק את השעה n פעמים, שבכל אחד סיכוי $\frac{\lambda}{n}$ שתכנס שיחה, באופן בלתי־תלוי. אפשר אפילו להשאיף את n לאינסוף.

נבחין שאם X_i^n הוא משתנה מקרי שמקבל ערך 1 אם נכנסה שיחה במקטע i במידול עם n מקטעים, ואחרת 0, אזי כמות השיחות במידול עם n מקטעים היא

$$X_1^n + \ldots + X_n^n$$

כל אחד מהשתנים הללו מתפלג $\mathrm{Ber}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$, וכן הם בלתי תלויים, ולכן

$$X_1^n + \ldots + X_n^n \sim \mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$

ממשפט ההתכנסות הבינומית נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_1^n + \ldots + X_n^n = k\right) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

1 תכונת חיבוריות

1.1 קונבולוציה

בהינתן זוג משתנים מקריים X,Y בלתי־תלויים, מהי ההתפלגות של $X+Y$ במונחי ההתפלגויות של X,Y?

$$\mathbb{P}\left(X+Y=a\right)-\sum_{x}\mathbb{P}\left(X=x,Y=a-x\right)=\sum_{x}\mathbb{P}\left(X=x\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y=a-x\right)$$

טענה 1.1 (חיבוריות ההתפלגות הבינומית והפואסונית)

1. אם $X\sim\mathrm{Bin}\left(n,p\right),Y\sim\mathrm{Bin}\left(m,p\right)$, וכן X,Y בלתי־תלויים, אזי $X+Y\sim\mathrm{Bin}\left(n+m,p\right)$.
2. אם $X\sim\mathrm{Poi}\left(\lambda\right),Y\sim\mathrm{Poi}\left(\mu\right)$, וכן X,Y בלתי־תלויים, אזי $X+Y\sim\mathrm{Poi}\left(\lambda+\mu\right)$.

הוכחה: בסעיפים.

1. נגדיר $X_1,\ldots,X_n\sim\mathrm{Ber}\left(p\right),Y_1,\ldots,Y_m\sim\mathrm{Ber}\left(p\right)$, וכל המשתנים המקריים הללו בלתי־תלויים. אזי, המשתנים המקריים הבאים מקיימים:

$$\begin{aligned}X\overset{d}{=}X_1+\ldots+X_n&\sim\mathrm{Bin}\left(n,p\right)\\Y\overset{d}{=}Y_1+\ldots+Y_m&\sim\mathrm{Bin}\left(m,p\right)\end{aligned}$$

וכעת

$$X+Y\overset{d}{=}X_1+\ldots+X_n+Y_1+\ldots+Y_m\sim\mathrm{Bin}\left(m+n,p\right)$$

(הסימן $\overset{d}{=}$ משמעו "שווה־התפלגות").

2. נשתמש בנוסחת הקונבולוציה:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X+Y=k\right)&=\sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(X=x\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y=k-x\right)=\sum_{x=0}^{k}\mathbb{P}\left(X=x\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y=k-x\right)=\\&=\sum_{x=0}^{k}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^{k-x}}{(k-x)!}=e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{x=0}^{k}\frac{\lambda^x}{x!}\cdot\frac{\mu^{k-x}}{(x-k)!}=\\&=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\cdot\sum_{x=0}^{k}\binom{k}{x}\cdot\lambda^x\cdot\mu^{k-x}=e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{\left(\lambda+\mu\right)^k}{k!}\end{aligned}$$

ולכן

$$X+Y\sim\mathrm{Poi}\left(\lambda+\mu\right)$$

$\blacksquare$

2 צימודים והוכחה נוספת להתכנסות התפלגות בינומית לפואסונית

הגדרה 2.1 בהנתן זוג התפלגויות μ_1, μ_2 על קבוצות כלשהן S_1, S_2, כל התפלגות (משותפת) על $S_1 \times S_2$ שההתפלגויות השוליות שלה הן μ_1, μ_2 נקראת צימוד של μ_1, μ_2.

דוגמא יהי $0 \leq p \leq 1$. נראה צימוד של התפלגות $\mathrm{Ber}\left(p\right), \mathrm{Poi}\left(p\right)$.

/	0	1	2	3	...	סכום
0	$1-p$	0	0	0	$\dots$	$1-p$
1	$e^{-p}-(1-p)$	pe^{-p}	$\frac{p^2}{2}e^{-p}$	$\frac{p^3}{6}e^{-p}$	$\dots$	p
סכום	e^{-p}	pe^{-p}	$\frac{p^2}{2}e^{-p}$	$\frac{p^3}{6}e^{-p}$	$\dots$	1

מקיום צימוד זה נובע שקיים מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ כך שהמשתנה (X, Y) בעל התפלגות משותפת זו. למשל אפשר לקחת

$$\Omega = \{(i,j) \mid 0 \leq i, j \in \mathbb{Z}\}$$

ואת $\mathbb{P}$ ניקח להיות ההסתברות שבטבלה. כעת

$$\begin{aligned} X\left((i,j)\right) &= i \\ Y\left((i,j)\right) &= j \end{aligned}$$

ומתקיים $X \sim \mathrm{Ber}\left(p\right), Y \sim \mathrm{Poi}\left(p\right)$.

טענה 2.2 כאן,

$$\mathbb{P}\left(X \neq Y\right) \leq p^2$$

הוכחה: לפי הטבלה,

$$\mathbb{P}\left(X \neq Y\right) = 1 - \left(1 - p + pe^{-p}\right) = p - pe^{-p} = p\left(1 - e^{-p}\right) \leq p \cdot p = p^2$$

כאשר האי שוויון כאן נובע מתוך $1 - p \leq e^{-p}$. ■

כך נוכל לקבל התכנסות של בינומי לפואסוני - ניקח את הפואסון ונפרק אותו להרבה מאוד פואסונים קטנים, שסכומם הפואסון המקורי. כל אחד מהקטנים הוא "בערך" ברנולי, כמו שראינו עכשיו, ולכן הפואסון הגדול הוא "בערך" סכום של ברנולי, שהוא בינומי - לכן בגבול, בינומי הוא פואסוני.