

מבוא להסתברות

© ארזים

10 באפריל 2016

1 התפלגויות נפוצות

1.1 התפלגות ברנולי - $\text{Ber}(p)$

זוהי התפלגות μ על $\{0, 1\}$ כך שמתקיים $\mu(1) = p, \mu(0) = 1 - p$. כמובן שמתקיים $0 \leq p \leq 1$. למשל, אם A מאורע עם הסתברות p , ונגדיר $X = 1_A$ המשתנה המקרי האינדיקטור של A , אזי $X \sim \text{Ber}(p)$.

1.2 התפלגות בינומית - $\text{Bin}(n, p)$

מבצעים $n \geq 1$ (שלם) ניסויים עם הסתברות $0 \leq p \leq 1$ להצלחה. זו התפלגות μ על $\{0, 1, \dots, n\}$ כך שמתקיים

$$\mu(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

נוכיח שאכן מדובר בהתפלגות: ברור שלכל k מתקיים $\mu(k) \geq 0$. ואכן, מתקיים גם

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$$

וזאת בגלל נוסחת הבינום של ניוטון.

התפלגות זו עולה למשל בהקשר הבא: יהיו X_1, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי-תלויים שמתפלגים $\text{Ber}(p)$. אזי המשתנה המקרי שהוא סכוםם מקיים

$$X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$$

הוכחה: נסמן $S_n = X_1 + \dots + X_n$. ברור שמשתנה זה מקבל ערכים בקבוצה $\{0, \dots, n\}$ בהסתברות 1, כי כל X_i מקבל ערכים בקבוצה $\{0, 1\}$ בהסתברות 1. עבור $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ נגדיר מאורע

$$A_I = \bigcap_{i \in I} \{X_i = 1\} \bigcap_{i \notin I} \{X_i = 0\}$$

אז מתקיים

$$\{S_n = k\} = \bigcup_{I:|I|=k} A_I$$

וזה איחוד זר, ולכן

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \sum_{I:|I|=k} A_I = \sum_{I:|I|=k} \prod_{i \in I} \{X_i = 1\} \prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus I} \{X_i = 0\} = \\ &= \sum_{I:|I|=k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

כשהמעברים נובעים מהאי-תלות, מהתפלגות ברנולי ומכמות תתי קבוצות בגודל k .

1.3 התפלגות גיאומטרית - $\text{Geom}(p)$

התפלגות זו היא בעלת פרמטר $0 < p \leq 1$, והיא התפלגות μ על $\{1, 2, \dots\}$ שמוגדרת על ידי

$$\mu(k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

זו אכן התפלגות, כי

$$\sum_{k=1}^{\infty} p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

וזאת בגלל הנוסחה לסכום של טור גיאומטרי (מכאן השם).
התפלגות זו עולה כאשר יש לנו סדרת ניסויים בלתי תלויים עם הסתברות הצלחה p , שנעצרת בהצלחה הראשונה. אם X הוא כמות הניסויים עד ההצלחה הראשונה, אזי $X \sim \text{Geom}(p)$.

הערה 1.1 כאן ניתן לממש את התיאור על מרחב ההסתברות

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, 01, 001, \dots\} \\ \mathbb{P} &= \left\{ p, p(1-p), p(1-p)^2, \dots \right\} \end{aligned}$$

1.4 התפלגות פואסון (Poisson) - $\text{Poi}(\lambda)$

להתפלגות זו פרמטר $\lambda > 0$ ממשי. זו התפלגות μ על הקבוצה $\{0, 1, 2, \dots\}$ המוגדרת על ידי

$$\mu(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

זו אכן התפלגות שכן

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

ראינו כבר התפלגות זו: כאשר Π תמורה שנבחרת אחיד מבין כל התמורות על n איברים, וכאשר X הוא כמות נקודות השבת של Π (כלומר כמות האיברים i כך שמתקיים $\Pi(i) = i$). לכל $k \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k) = e^{-1} \frac{1}{k!}$$

וזו התפלגות פואסון עם $\lambda = 1$.

"עיקרון כללי": חוק המספרים הקטנים: כאשר יש לנו סדרת מאורעות, בלתי-תלויים או כמעט בלתי-תלויים, עם הסתברות קטנה לקרות, כך שבסך הכל מצפים שכמות קבועה λ תקרה, התפלגות כמות המאורעות שקורים בפועל מתכנסת להתפלגות $\text{Poi}(\lambda)$ כאשר כמות המאורעות שואפת לאינסוף.

משפט 1.2 (התכנסות הפלגות בינומית להתפלגות פואסונית)

תהי $(p_n)_{n \geq 1}$ סדרת הסתברויות המקיימת $n \cdot p_n \rightarrow \lambda$ עבור $\lambda > 0$ ממשי. אזי ההתפלגות $\text{Bin}(n, p_n)$ מתכנסת להתפלגות $\text{Poi}(\lambda)$ כאשר n שואף לאינסוף, כלומר לכל $k \geq 0$ שלם וקבוע, מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

דוגמא: לכל n , תהי $(X_i^n)_{i=1}^n$ סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים המקיימים $X_i^n \sim \text{Ber}(\frac{1}{n})$. אזי, לכל $k \geq 0$ שלם וקבוע,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_1^n + \dots + X_n^n = k) \rightarrow e^{-1} \cdot \frac{1}{k!}$$

כאן $p_n = \frac{1}{n}$ ומתקיים $\lambda = 1 \rightarrow 1 = \lambda$ וכן $X_1^n + \dots + X_n^n \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{n})$