<u>מבוא להסתברות</u>

ⓒ ארזים

6 באפריל 2016

<u>דוגמא: הילוך מקרי פשוט</u>

מילים מטבע הוגן n פעמים. X_i מוגדר להיות 1 אם ההטלה שמספרה i הייתה עץ, או -1 אחרת. כמו כן, נגדיר

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= X_1 \\ &\vdots \\ S_n &= X_1 + \cdots + X_n \end{aligned}$$

<u>מידול:</u> נבחר בתור מרחב מדגם Ω את

$$\Omega = \{H, T\}^n$$

וניקח את ההסתברות כך שנקבל מרחב מכפלה, כלומר לכל $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{2^n}$$

כעת נבחן את המשתנים המקריים שלנו.

$$X_i(\omega) = X_i((\omega_1, \ldots, \omega_n)) = \begin{cases} 1 & \omega_i = T \\ -1 & \omega_i = H \end{cases}$$

וכעת S_i הוא פונקציה של $X_1, \ldots, X_i$, או באופן מפורש,

$$\begin{aligned} S_i &= f_i(X_1, \ldots, X_i) \\ f_i(x_1, \ldots, x_i) &= x_1 + \cdots + x_i \end{aligned}$$

תקיון טעות משיעור שעבר:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \cdot 2^{-n} & |k| \le n, k + n \equiv 0 \pmod 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

התיקון הוא החלפת $\binom{n}{k}$ במקדם בינומי אחר $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$.

1 אי־תלות של משתנים מקריים

הגדרה 1.1 משתנים מקריים $X_i : \Omega \to S_i$, כאשר $1 \le i \le n$ נקראים <u>בלתי־תלויים</u> אם לכל הצבה אפשרית של $x_i \in S_i$, כאשר $1 \le i \le n$, מתקיים

$$\mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = x_1\right) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(X_n = x_n\right)$$

<u>מקרה פרטי:</u> נתונים מאורעות $A_1, \ldots, A_n$. נגדיר משתנים מקריים $X_i = 1_{A_i}$.

טענה 1.2 $A_1, \ldots, A_n$ בלתי־תלויים אם ורק אם $X_1, \ldots, X_n$ בלתי־תלויים.

הוכחה: אם אפילו אחד מבין x_i אינו 0 או 1, אזי

$$\mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right) = 0 = \mathbb{P}\left(X_1 = x_1\right) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(X_n = x_n\right)$$

נתבונן למשל במאורע

$$\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \cdots \cap \{X_n = 1\} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

לכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)
\end{aligned}$$

באופן דומה,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_1 = 0, \ldots, X_n = 0\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i^c\right)
\end{aligned}$$

כאשר נעבור על כל האפשרויות להצבות של $x_i \in \{0,1\}$, נקבל את כל החיוכים

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i$$

כאשר לכל i מתקיים

$$B_i \in \{A_i, A_i^c\}$$

מכאן נסיק שאי־תלות של המשתנים המקריים גוררת אי־תלות של המאורעות, ולהיפך, כי ראינו שמספיק לבדוק את האופציות להצבות של $x_i \in \{0,1\}$. ■

הערה 1.3 מכאן, למשל, שיתכן שהמשתנים המקריים X_1, X_2, X_3 בלתי־תלויים בזוגות, כלומר כל זוג הוא בלתי־תלוי, אבל השלישייה לא תהיה בלתי־תלוייה.

הערה 1.4 בדוגמת ההילוך המקרי הפשוט, כל תת־אוסף של X_i הוא בלתי־תלוי. נראה זאת לגבי $X_1, \ldots, X_n$. ההסתברות

$$\mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right)$$

היא 0 אם לפחות אחד מבין x_i אינו 1 או 1־, והיא 2^{-n} אחרת, משום שאלה קואורדינטות זרות במרחב מכפלה. לסיום, אותו הדבר נכון גם לגבי

$$\mathbb{P}\left(X_1 = x_1\right) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(X_n = x_n\right)$$

1.1 טענות בסיסיות לגבי אי־תלות של משתנים מקריים

טענה 1.5 המשתנים $X_1, \ldots, X_n$ בלתי־תלויים אם ורק אם X_1 בלתי־תלוי בווקטור $(X_2, \ldots, X_n)$, וגם $X_2, \ldots, X_n$ בלתי־תלויים.

הוכחה: כיוון ראשון: נניח כי X_1 והווקטור בלתי־תלויים, וכי קואורדינטות הווקטור בלתי־תלויות. נרשום

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \left(X_2, \ldots, X_n\right) = \left(x_2, \ldots, x_n\right)\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 = x_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\left(X_2, \ldots, X_n\right) = \left(x_2, \ldots, x_n\right)\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 = x_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_2 = x_2\right) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(X_n = x_n\right)
\end{aligned}$$

כיוון שני: דומה. נניח כי $X_1, \ldots, X_n$ בלתי־תלוים. נראה קודם כי X_1 בלתי תלוי בווקטור.

$$\mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \left(X_2, \ldots, X_n\right) = \left(x_2, \ldots, x_n\right)\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = x_1\right) \cdots \mathbb{P}\left(X_n = x_n\right)$$

נותר להוכיח כי

$$\mathbb{P}\left(X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\right) = \mathbb{P}\left(X_2 = x_2\right) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(X_n = x_n\right)$$

דהיינו, נותר להוכיח כי $X_2, \ldots, X_n$ בלתי־תלויים, וזה תוכן הטענה הבאה, לכן נעצור כאן ונראה אותה. ■

טענה 1.6 אם $X_1, \ldots, X_n$ בלתי־תלויים, עבור $n \geq 3$, אזי גם $X_2, \ldots, X_n$ בלתי־תלויים. באינדוקציה, כל תת־אוסף של X_i הוא בלתי־תלוי.

הוכחה: נקבע $x_2,\dots,x_n$. צריך להוכיח:

$$\mathbb{P}\left(X_2=x_2,\dots,X_n=x_n\right)=\mathbb{P}\left(X_2=x_2\right)\cdot\dots\cdot\mathbb{P}\left(X_n=x_n\right)$$

נסמן

$$T=\left\{x_1\mid\exists\omega\in\Omega:X_1\left(\omega\right)=x_1\right\}$$

בהכרח T סופית או בת־מניה. נשים לב שמתקיים

$$\left\{X_2=x_2,\dots,X_n=x_n\right\}=\bigcup_{x_1\in T}\left\{X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n\right\}$$

וזהו כמובן איחוד זר. לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_2=x_2,\dots,X_n=x_n\right) &= \sum_{x_1\in T}\mathbb{P}\left(X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n\right)= \\ &= \sum_{x_1\in T}\mathbb{P}\left(X_1=x_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_2=x_2\right)\cdot\dots\cdot\mathbb{P}\left(X_n=x_n\right)\end{aligned}$$

כעת נותר להוכיח

$$\sum_{x_1\in T}\mathbb{P}\left(X_1=x_1\right)=1$$

והדבר נכון משום שמתקיים

$$\Omega=\bigcup_{x_1\in T}\left\{X_1=x_1\right\}$$

וזהו איחוד זר. ■

בכך סיימנו גם את הוכחת הטענה הראשונה.

טענה 1.7 יהיו $X_1,X_2:\Omega\to S$ משתנים מקריים בלתי־תלויים. תהי S' קבוצה נוספת, ותהי $f:S\to S'$. אזי $f\left(X_1\right),X_2$ בלתי־תלויים.

הוכחה: צריך להוכיח כי לכל a_1,x_2 מתקיים

$$\mathbb{P}\left(f\left(X_1\right)=a_1,X_2=x_2\right)=\mathbb{P}\left(f\left(X_1\right)=a_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_2=x_2\right)$$

נקבע a_1,X_2. נשים לב שאם נסמן

$$E_{a_1}=\left\{x_1\in S\mid f\left(x_1\right)=a_1\right\}=f^{-1}\left(\left\{a_1\right\}\right)$$

נשים לב שיש שוויון בין המאורעות

$$\{f(x_1)=a_1\}=\{X_1\in E_{a_1}\}$$

יש להוכיח כי

$$\mathbb{P}(X_1\in E_{a_1},X_2=x_2)=\mathbb{P}(X_1\in E_{a_1})\cdot\mathbb{P}(X_2=x_2)$$

כמו קודם, נסמן

$$T=\{x_1\mid\exists\omega\in\Omega:X_1(\omega)=x_1\}$$

וזו קבוצה סופית או בת־מניה. כעת נבחין כי

$$\{X_1\in E_{a_1}\}=\{X_1\in E_{a_1}\cap T\}$$

ולכן נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות שהקבוצה E_{a_1} סופית או בת־מניה. כעת, נרשום

$$\{X_1\in E_{a_1}\}=\bigcup_{x_1\in E_{a_1}}(X_1=x_1)$$

וזהו כמובן איחוד זר, ולכן גם

$$\{X_1\in E_{a_1}\}\cap\{X_2=x_2\}=\bigcup_{x_1\in E_{a_1}}(\{X_1\in x_1\}\cap\{X_2=x_2\})$$

וזהו איחוד זר, ולכן

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1\in E_{a_1},X_2=x_2) &= \sum_{x_1\in E_{a_1}}\mathbb{P}(X_1=x_1,X_2=x_2)=\sum_{x_1\in E_{a_1}}\mathbb{P}(X_1=x_1)\cdot\mathbb{P}(X_2=x_2)\\ &= \mathbb{P}(X_2=x_2)\cdot\sum_{x_1\in E_{a_1}}\mathbb{P}(X_1=x_1)=\mathbb{P}(X_2=x_2)\cdot\mathbb{P}(X_1\in E_{a_1})\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.8 אם $X_1,\dots,X_n$ בלתי־תלויים, f פוקנציה, אזי גם $f(X_1,\dots,X_k),X_{k+1},\dots,X_n$ בלתי־תלויים.

הוכחה: נסמן $X=(X_1,\dots,X_k)$, $Y=(X_{k+1},\dots,X_n)$. מהנתון, X,Y בלתי־תלויים. מהטענה השלישית, $f(X),Y$ בלתי תלויים. כמו כן, וודאי $X_{k+1},\dots,X_n$ (מהטענה השנייה). כעת, מן הטענה הראשונה, $f(X),X_{k+1},\dots,X_n$ גם כן בלתי־תלויים. ■

מסקנה 1.9 אם $X_1,\ldots,X_n$ בלתי־תלויים, f_i פוקנציות, אזי $f_1\left(X_1\right),\ldots,f_n\left(X_n\right)$ גם הם בלתי־תלויים.

למשל, בדוגמת ההילוך המקרי הפשוט:

$$S_{17}-S_{10},S_{10}-S_6,X_1,X_2$$

אלה משתנים מקריים בלתי תלויים, שכן

$$\begin{aligned}S_{17}-S_{10} &= X_{11}+X_{12}+\cdots+X_{17}\\ S_{10}-S_6 &= X_7+X_8+X_9+X_{10}\end{aligned}$$

לכן אלה למעשה פונקציות על משתנים מקריים בלתי־תלויים, ולכן מה שראינו היא קבוצה בלתי־תלויה של משתנים מקריים.

מסקנה 1.10 יהיו $X_1,\ldots,X_n$ משתנים מקריים בלתי־תלויים, כאשר $X_i:\Omega\to S_i$, ויהיו $E_1,\ldots E_n$ קבוצות, כאשר $E_i\subseteq S_i$. אזי

$$\mathbb{P}\left(X_1\in E_1,\ldots,X_n\in E_n\right)=\mathbb{P}\left(X_1\in E_1\right)\cdot\cdots\cdot\mathbb{P}\left(X_n\in E_n\right)$$

הוכחה: נגדיר $f_i:S_i\to\{0,1\}$ על ידי

$$f_i\left(s\right)=\begin{cases}1 & s\in E_i\\ 0 & s\notin E_i\end{cases}$$

אזי

$$\left\{X_i\in E_i\right\}=\left\{f_i\left(X_i\right)=1\right\}$$

מהמסקנה הקודמת, $f_1\left(X_1\right),\ldots,f_n\left(X_n\right)$ בלתי־תלויים, ומכאן נובע

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1\in E_1,\ldots,X_n\in E_n\right) &= \mathbb{P}\left(f_1\left(X_1\right)=1,\ldots,f_n\left(X_n\right)=1\right)=\\ &= \mathbb{P}\left(f_1\left(X_1\right)=1\right)\cdot\cdots\cdot\mathbb{P}\left(f_n\left(X_n\right)=1\right)=\\ &= \mathbb{P}\left(X_1\in E_1\right)\cdot\cdots\cdot\mathbb{P}\left(X_n\in E_n\right)\end{aligned}$$

■