מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

3 באפריל 2016

1 משתנים מקריים והתפלגות

ניזכר: בהנתן מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ וקבוצה S, משתנה מקרי שמקבל ערכים בקבוצה S הוא פונקציה $X : \Omega \to S$.

בתפלגות על S היא פונקציה $\mu : S \to [0,1]$, בעלת תומך סופי או בן מניה, כאשר התומך הוא $\{x \in S \mid \mu(x) \neq 0\}$, שמקיימת

$$\sum_{x \in S} \mu(x) = 1$$

ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא

$$\mu_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

כאשר המאורע $\{X = x\}$ הוא למעשה

$$\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

דוגמא: מטילים מטבע עם הסתברות $\frac{1}{3}$ לעץ ארבע פעמים. Y_1 - כמות העצים בהטלות 1,2; Y_2 - כמות העצים בהטלות 2,3; Y_3 - כמות העצים בהטלות 3,4. לכל $1 \leq i \leq 3$, מתקיים:

$$Y_i \sim \begin{cases} 0 & \frac{4}{9} \\ 1 & \frac{4}{9} \\ 2 & \frac{1}{9} \end{cases}$$

בפרט, Y_1, Y_2, Y_3 שווי התפלגות.

Y_1/Y_2	0	1	2
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$	0
1	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3}$
2	0	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$

ראינו גם כי ניתן להשיג את ההתפלגויות השוליות מההתפלגות המשותפת:

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 0) + \mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 2)$$

1.1 התפלגות מותנה

בהינתן מאורע $A \subseteq \Omega$ עם הסתברות חיובית, נוכל לשאול מה ההתפלגות של משתנה מקרי X במרחב ההסתברות המותנה במאורע A. כלומר, נרצה לדעת הסתברויות מהצורה $\mathbb{P}(X = x \mid A)$.

מקרה נפוץ: נתון משתנה מקרי נוסף Y וערך y כך שמתקיים $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, והמאורע A הוא $A = \{Y = y\}$.

למשל, בדוגמא,

$$\mathbb{P}(Y_1 = x \mid Y_2 = 2) = \frac{\mathbb{P}(Y_1 = x, Y_2 = 2)}{\mathbb{P}(Y_2 = 2)}$$

נקבל מהטבלה שההתפלגות השולית היא

$$\mathbb{P}(Y_2 = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$$

וכעת נקבל

$$\mathbb{P}(Y_1 = x \mid Y_2 = 2) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{2}{3} & x = 1 \\ \frac{1}{3} & x = 2 \end{cases}$$

2 משתנים מקריים רבים

כאשר נתונים n משתנים מקריים, $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to S$, ניתן לדבר על ההתפלגות המשותפת שלהם, שהיא ההתפלגות של הווקטור $(X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to S^n$ ־ זהו משתנה מקרי שמקבל ערכים בקבוצה S^n, שמוגדר לפי

$$(X_1, \ldots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

לווקטור זה ההתפלגות

$$\mu_{(X_1, \ldots, X_n)}(x_1, \ldots x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

בהקשר זה, נקרא להתפלגות של כל תת־קבוצה של המשתנים התפלגות שולית. למשל $\mu_{X_7}, \mu_{(X_1, X_3)}$ וכדומה.

<u>דוגמה:</u> הילוך מקרי פשוט.

מטילים מטבע הוגן n פעמים. נסמן בתור X_i את המשתנה שמקבל 1 אם יצא עץ בהטלה שמספרה i, ומקבל -1 אם יצא פלי. נגדיר $n+1$ משתנים מקריים נוספים:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= X_1 \\ S_2 &= X_1 + X_2 \\ &\vdots \\ S_n &= X_1 + \cdots + X_n \end{aligned}$$

זהו למעשה הילוך מקרי ־ בכל תור, מטילים מטבע, והולכים צעד למעלה או צעד למטה (1 או ־1).

הערה 2.1 כאן הגדרנו משתנים מקריים כפונקציה של משתנים אחרים. באופן כללי, כאשר $X_1, \dots, X_n$ משתנים מקריים בעלי ערכים בקבוצה S, ונתונה פונקציה $f : S^n \to T$, המשתנה מקרי $Y = f(X_1, \dots X_n)$ מוגדר כמשתנה המקרי שמקבל ערכים בקבוצה T על ידי $Y(\omega) = f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

נחזור לדוגמה. ננסה להבין את ההתפלגות המשותפת של $S_0, \dots, S_1$.

$$(S_0, S_1) \quad \sim \quad \begin{cases} (0,1) & \frac{1}{2} \\ (0,-1) & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(S_0, S_1, S_2) \quad \sim \quad \begin{cases} (0,1,2) & \frac{1}{4} \\ (0,1,0) & \frac{1}{4} \\ (0,-1,0) & \frac{1}{4} \\ (0,-1,-2) & \frac{1}{4} \end{cases}$$

ההתפלגות של כל המשתנים יחד נתמכת על ידי הקבוצה

$$\{(s_0, s_1, \dots, s_n) \mid s_0 = 0, |s_{i+1} - s_i| = 1 \ \forall 0 \le i \le n-1\}$$

וכל איבר בקבוצה זו מתקבל בהסתברות שווה, $\frac{1}{2^n}$.

מהי ההתפלגות השולית של S_n? ניתן לקבל אותה כסכום מההתפלגות המשותפת:

$$\mathbb{P}(S_n = s_n) = \sum_{s_0, \dots, s_{n-1}} \mathbb{P}(S_0 = s_0, \dots, S_{n-1} = s_{n-1}, S_n = s_n)$$

ראינו בתרגול שמתקיים

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot 2^{-n} & |k| \le n, k+n \equiv 0 \pmod 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$