מבוא להסתברות

© ארזים

30 במרץ 2016

1 משתנים מקריים והתפלגויות

נתון מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$.

הגדרה 1.1 תהי S קבוצה. משתנה מקרי X המקבל ערכים בקבוצה S הוא פונקציה $X : S \to \Omega$. אם S אינה מצויינת, בדרך כלל נתכוון שמתקיים $S = \mathbb{R}$.

דוגמאות:

1. מטילים קוביה הוגנת פעמיים. יהי X סכום ערכי התוצאות בזוג ההטלות.
באופן מפורט:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\}^2 = \{(i,j) \mid 1 \le i,j \le 6\} \\
\mathbb{P}\left((i,j)\right) &= \frac{1}{36} \\
X &: \Omega \to \mathbb{R} \\
X\left((i,j)\right) &= i+j
\end{aligned}$$

2. מטילים מטבע עם הסתברות $\frac{1}{3}$ לעץ ארבע פעמים. Y_1 - כמות העצים בשתי ההטלות הראשונות. Y_2 - כמות העצים בהטלות השנייה והשלישית. Y_3 - כמות העצים השתי ההטלות האחרונות.
באופן מפורט: נסמן עץ בתור 1 ופלי בתור 0.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{0,1\}^4 \\
\mathbb{P}\left((\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} \\
Y_1, Y_2, Y_3 &: \Omega \to \mathbb{R} \\
Y_1\left((\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)\right) &= \omega_1+\omega_2 \\
Y_2\left((\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)\right) &= \omega_2+\omega_3 \\
Y_3\left((\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)\right) &= \omega_3+\omega_4
\end{aligned}$$

3. נתון מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ ומאורע $A \subseteq \Omega$. המשתנה המקרי האינדיקאטור של המאורע מסומן 1_A, והוא משתנה מקרי $1_A : \Omega \to \mathbb{R}$ שמוגדר על ידי

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

1.1 התפלגויות

תהי S קבוצה.

הגדרה 1.2 התפלגות היא פונקציה $\mu : S \to [0,1]$ כך שהקבוצה $\{x \in S \mid \mu(x) \neq 0\}$ היא סופית או בת מניה, וכן

$$\sum_x \mu(x) = 1$$

הערה 1.3 עבור $f : S \to \mathbb{R}$, נקרא לקבוצה $\{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$ התומך של f. כאשר התומך של f סופי או בן מניה, נסמן

$$\sum_x f(x)$$

עבור הטור שבו x נמצא בתומך של f. הסכום מוגדר היטב כאשר f מקבלת ערכים אי־שליליים, או שהטור מתכנס בהחלט, כלומר

$$\sum_x |f(x)| < \infty$$

דוגמאות:

1. $S = \mathbb{R}$, ונגדיר $\mu(1) = \frac{1}{2}, \mu(0) = \frac{1}{2}$, ועבור כל $x \notin \{0,1\}$, $\mu(x) = 0$.
2. $S = \mathbb{R}$, נגדיר $\mu(k) = \frac{1}{2^k}$ עבור $k \geq 1$ שלם, ועבור x שאינו שלם חיובי, $\mu(x) = 0$.
3. כאשר $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות (בפרט Ω סופית או בת מנייה), הפונקציה $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$ היא התפלגות, כאשר $S = \Omega$.

הגדרה 1.4 (התפלגות של משתנה מקרי) נתון מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ ומשתנה מקרי $X : \Omega \to S$. ההתפלגות של X היא התפלגות על S שתסומן μ_X ותוגדר לכל $x \in S$ על ידי

$$\mu_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

הערה 1.5 המאורע $\{X=x\}$ הוא למעשה

$$\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x\}$$

טענה 1.6 ההתפלגות של משתנה מקרי X היא אכן התפלגות על S.

הוכחה: התומך של μ_X סופי או בן מניה, כלומר

$$\{x\in S\mid\mathbb{P}(X=x)>0\}$$

היא סופית או בת מניה, כי Ω סופית או בת מניה, והמאורע $\{X=x\}$ ריק אם x אינו בתמונה של ω דרך X.

ברור שמתקיים

$$\mu_X(x)=\mathbb{P}(X=x)\in[0,1]$$

לכן נותר לוודא שמתקיים

$$\sum_x\mu_X(x)=1$$

נסמן $T=\{x\in S\mid\exists\omega\in\Omega.X(\omega)=x\}$. אזי

$$\sum_x\mu_X(x)=\sum_{x\in T}\mu_X(x)=\sum_{x\in T}\mathbb{P}(X=x)$$

נבחים כעת כי מתקיים

$$\Omega=\bigcup_{x\in T}\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x\}=\bigcup_{x\in T}\{X=x\}$$

ושמאורעות אלו הם זרים, כאשר T סופית או בת מניה. לכן

$$\sum_{x\in T}\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in T}\{X=x\}\right)=\mathbb{P}(\Omega)=1$$

■

<u>התפלגויות המשתנים המקריים בדוגמאות:</u>

1. X מקבל את הערכים $\{2,\ldots,12\}$ בהתסברות חיובית, כלומר הם התומך של μ_X.

$$\begin{aligned}\mu_X(2)&=\mu_X(X=2)=\mathbb{P}(\{(1,1)\})=\frac{1}{36}\\ \mu_X(3)&=\mu_X(X=3)=\mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\})=\frac{2}{36}\\ \mu_X(j)&=\begin{cases}\begin{cases}\frac{j-1}{36} & 1\le j\le 7\\ \frac{13-i}{36} & 8\le j\le 12\end{cases} & 1\le j\le 12\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

צורת רישום: נרשום לפעמים

$$X \sim \begin{cases} 2 & \frac{1}{36} \\ 3 & \frac{2}{36} \\ 4 & \frac{3}{36} \\ \vdots & \vdots \\ 12 & \frac{1}{36} \end{cases}$$

2. התומך של התפלגות Y_1 הוא $\{0,1,2\}$, ומתקיים

$$Y_1 \sim \begin{cases} 0 & \frac{4}{9} \\ 1 & \frac{4}{9} \\ 2 & \frac{1}{9} \end{cases}$$

כמו כן, עבור Y_2 מתקיים

$$Y_2 \sim \begin{cases} 0 & \frac{4}{9} \\ 1 & \frac{4}{9} \\ 2 & \frac{1}{9} \end{cases}$$

אבל נשים לב שאין שוויון בין שני המשתנים המקריים, כי כפונקציות על Ω הם משתנים מקריים שונים. למשל

$$Y_1\left((0,0,1,1)\right) = 0 \neq 1 = Y_2\left((0,0,1,1)\right)$$

יחד עם זאת, Y_1, Y_2 הם <u>שווי־התפלגות</u>, שכן

$$\mu_{Y_1} = \mu_{Y_2}$$

למעשה, נאמר ששני משתנים מקריים X, Y הם שווי התפלגות אם לכל x,

$$\mathbb{P}\left(X = x\right) = \mathbb{P}\left(Y = x\right)$$

הערה 1.7 אם X שווה Y, אז X, Y שווי־התפלגות.

3. יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ויהי $A \subseteq \Omega$ מאורע.

$$1_A \sim \begin{cases} 1 & \mathbb{P}\left(A\right) \\ 0 & 1 - \mathbb{P}\left(A\right) \end{cases}$$

1.2 זוג משתנים מקריים

כאשר X,Y משתנים מקריים על אותו מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$, נאמר $X,Y:\Omega\to S$, אזי אפשר גם לחשוב על X,Y כמשתנה מקרי אחד (X,Y) שמקבל ערכים בקבוצה S^2] ומוגדר על ידי

$$(X,Y)(\omega)=(X(\omega),Y(\omega))\in S^2$$

למשתנה זה יש התפלגות $\mu_{(X,Y)}$, שהיא התפלגות על S^2 ותקרא ההתפלגות המשותפת של X,Y. בהקשר זה, ההתפלגויות של X,Y בנפרד מכונות התפלגויות שוליות.
בדוגמא 2 של קודם,, מהי ההתפלגות המשותפת של Y_1,Y_2? כיוון שהתומך של התפלגות Y_1 הוא $\{0,1,2\}$, והדבר נכון גם עבור Y_2, נובע שהתומך של (Y_1,Y_2) מוכל בקבוצה $\{0,1,2\}^2$. נחשב

$$\mu_{(Y_1,Y_2)}(0,0)=\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\mathbb{P}(\{(0,0,0,j)\})=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

נוח להציג התפלגות משותפת של זוג משתנים מקריים בטבלה.

2	1	0	Y_1/Y_2
0	$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$	0
$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{6}{27}$	$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$	1
$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$	0	2

נחשב את ההתפלגויות המשותפת והשוליות של Y_1,Y_3 ההתפלגות השולית של Y_3 זהה לשל Y_1. כמו כן, המאורעות $Y_1=x,Y_3=y$ הם בלתי תלויים, כי הם מאורעות במרחב מכפלה שמדברים על קואורדינטות שונות.
כעת,

2	1	0	Y_1/Y_3
$\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}$	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	0
$\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}$	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	1
$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}$	2

אנו רואים כעת דוגמא למצב בו לאותו זוג התפגויות שוליות יש התפלגות משותפת שונה בשני המקרים. במלים אחרות, ההתפלגויות השוליות אינן קובעות את ההתפלגות המשותפת.
ההתפלגויות השוליות נקבעות מההתפלגות המשותפת. אכן, עבור משתנים מקריים X,Y,

$$\{X=x\}=\bigcup_{y}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$$

וזה איחוד זר, בו לכל היותר מספר בן מניה של גורמים לא ריקים. לכן,

$$\mathbb{P}(X=x)=\sum_{Y}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$