סיכום מבוא לקומבי' 1

המקדם הבינומי

- בינום ניוטון - $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- זהויות שימושיות -

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sum_{k_{even}=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k_{odd}=0}^{n} \binom{n}{k}$$

- זהות פסקל - $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- הכללה עבור $x \in \mathbb{R}$ - $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$
- הכללה עבור מולטינום - מס' הסדרות באורך $n_1+\dots+n_k$ כאשר i מופיע n_i פעמים:

$$\frac{(n_1+\dots+n_k)!}{n_1!\dots n_k!} = \binom{n_1+\dots+n_k}{n_1,\dots,n_k}$$

- נוסחאת מולטינום - $(x_1+\dots+x_k)^n = \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1,\dots,n_k} \cdot x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$
- נוסחאת הבינום ההפוך- $\left(\frac{1}{1-x}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$
- הערכת המקדם הבינומי - $\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$, $\binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!}$

מספר הפיתרונות למשוואות מהסוג $x_1+\dots+x_n=k$

- מספר הפתרונות למשוואה $x_1+\dots+x_n=k$, $\forall i.\ x_i \ge 0$ הוא - $\binom{n+k-1}{k}$
- מספר הפתרונות לאי השוויון $x_1+\dots+x_n \le k$, $\forall i.\ x_i \ge 0$ הוא - $\binom{n+k}{k}$
- כאשר יש הגבלה מסוג $x_i \le m$, ניתן להשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה
- יהיו $S_1,\dots,S_k \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ קבוצות. $\prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{m \in S_i} x^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

כאשר a_n הוא מס' הפיתרונות למשוואה $y_1+\dots+y_k=n$ אם $\forall i.\ y_i \in S_i$

- כשהדברים שמחלקים שונים, נשתמש בפונקציה יוצרת מעריכית במקום פונקציה יוצרת רגילה

מספר קטלן

- מספר קטלן - $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
- דברים ששקולים למספר קטלן:
  - מספר הסדרות המאוזנות באורך $2n$
  - מספר הילוכים הדו מימדיים עד ל-(n,n) שאינם חוצים את הישר $y=x$
  - מספר הסדרות העולות באורך n כאשר $0 \le a_i \le i$

סיכום מבוא לקומבי ב

עיקרון שובך היונים

- אם מכניסים $n+1$ שובכים ל-n יונים, אז בהכרח יש שובך עם לפחות 2 יונים
- אם מכניסים m יונים ל-n שובכים, אז בהכרח יש שובך עם לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יונים
- יהיו $A_1 \ldots A_k, B$ קבוצות עם מידה כך ש- $A_i \subseteq B$ $\forall i$. אז אם $\sum_{i=1}^{k} |A_i| > n|B|$, אז קיימות $n+1$ קבוצות A_i שחיתוכן לא ריק
- משפט ארדש-סקרש - בכל סדרה של ממשיים שונים באורך n^2+1 יש תת-סדרה מונוטונית באורך $n+1$

עיקרון ההכלה וההדחה

- יהיו $A_1 \ldots A_n$ קב' סופיות

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

- אם לכל $1 \le k \le n$ לכל $I \subseteq [n]$ בגודל $|I|=k$ מתקיים ש- $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ זהה אז:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \cdot |A_1 \cap \ldots \cap A_k|$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = \left|\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |S| - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| -$$

הערכות אסימפטוטיות

$$f,g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

- $f = O(g)$ אם קיים $c>0$ כך ש $f(n) \le c \cdot g(n)$ החל מ-n מסוים
  לא פורמלי - סדר הגודל של f קטן או שווה לסדר הגודל של g
- $f = \Omega(g)$ אם קיים $c>0$ כך ש- $f(n) \ge c \cdot g(n)$ החל מ-n מסוים
  לא פורמלי - סדר הגודל של f גדול או שווה לסדר הגודל של g
- $f = o(g)$ אם $\frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$
  לא פורמלי - סדר הגודל של f קטן ממש מזה של g
- $f = \omega(g)$ אם $\frac{g(n)}{f(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$
  לא פורמלי - סדר הגודל של f גדול ממש מזה של g
- $f = \Theta(g)$ אם $f = O(g)$ ו- $f = \Omega(g)$. לא פורמלי - סדרי הגודל שווים
- אם f מונוטונית יורדת אז $\int_{m}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{i=m}^{n} f(i) \le \int_{m-1}^{n} f(x)\,dx$
- אם f מונוטונית עולה אז $\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{i=m}^{n} f(i) \le \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx$
- נוסחת סטירלינג - $n! = \Theta\left(\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

סיכום מבוא לקומבי 3

נוסחאות נסיגה

- נוסחאת נסיגה לינארית - $f(n)=c_1f(n-1)+\dots+c_rf(n-r)+g(n)$
  הנוסחא נקראת הומוגנית אם $g(n)=0$
- פולינום אופייני של נוסחאת נסיגה הומוגנית r - $P(x)=x^r-c_1x^{r-1}-\dots-c_{r-1}x-c_r$
- שיטת פיתרון נוסחאות נסיגה הומוגנית:
  - נרשום פולינום אופייני ונפתור אותו
  - נסמן את שורשיו $\lambda_1 \dots \lambda_r$ (נניח שכולם בריבוי 1)
  - הפיתרון הכללי יהיה $f(n)=a_1\lambda_1^n+\dots+a_r\lambda_r^n$
  - נציב תנאי התחלה ונמצא את a_i המתאימים
- אם יש שורש λ בריבוי k נחליף את $a_i\lambda_i^n$ בביטוי מהצורה:
  $C_1\lambda_1^n+C_2n\lambda_2^n+C_3n^2\lambda_3^n+\dots+C_kn^{k-1}\cdot\lambda_k^n$
- שיטת פיתרון נוסחאות לא הומוגניות:
  - נמצא פיתרון כללי להומוגנית
  - נמצא פתרון פרטי כלשהו ללא הומוגנית
  - נציב תנאי התחלה בסכום שלהם, ונמצא את המקדמים המתאימים
- שיטה לניחוש פיתרון פרטי כאשר $g(n)=n^t\cdot b^n$: $\hat{f}(n)=Q(n)\cdot n^{m_b}\cdot b^n$
  כאשר: $Q(n)$ - פולינום ב-n ממעלה t
  m_b - ריבוי של b בפולינום האופייני המתאים להומוגנית (יכול להיות גם 0)

פונקציות יוצרות

- פונקציה יוצרת של סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא: $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- פונקציה יוצרת מעריכית של סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא: $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\cdot x^n$
- טורים שימושיים:
  $$\frac{1}{1-f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty} f(x)^n$$
  $$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
- סכום פונקציות יוצרות:
  אם $g(x)$ פונ' יוצרת ל-a_n, ו- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=b_n$
  אז פונ' יוצרת ל-b_n היא: $\frac{g(x)}{1-x}$
- מכפלת פונקציות יוצרות:
  אם $g(x)$ פונ' יוצרת ל-a_n, ו- $f(x)$ פונ' יוצרת ל-b_n, נגדיר $C_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$
  אז פונ' יוצרת של C_n היא $f(x)\cdot g(x)$