מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

ⓒ ארזים

28 בנובמבר 2016

1 בסיסים

1.1 יציבות של בסיסים אורתוגונליים

למה 1.1 יהי X מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $L, M \subseteq X$ תתי מרחב. אם $\dim L < \dim M < \infty$, אזי

$$L^{\perp} \cap M \neq \{0\}$$

הוכחה: נבחר בסיס אורתונורמלי $\{x_1, \ldots, x_n\}$ של L, ונבחר $\{y_1, \ldots, y_{n+1}\} \subseteq M$ בלתי תלויים לינארית. נראה שקיים $y \in \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$ כך שמתקיים $y \perp x_j$ לכל $1 \leq j \leq n$.

בניסוח מחדש, מחפשים β_i שלא כולם 0, כך שלכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \langle y_i, x_j \rangle = 0$$

זו מערכת של n משוואות לינאריות הומוגניות עם $n+1$ נעלמים, ולכן בהכרח יש לה פיתרון לא טריוויאלי. ■

משפט 1.2 יהי H מרחב הילברט ויהי $\{\varphi_n\}$ בסיס אורתונורמלי במרחב H. תהי $\{\psi_n\}$ מערכת אורתונורמלית כלשהי.

אם הסכום

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left|\varphi_n - \psi_n\right|\right|^2 < \infty$$

אזי $\{\psi_n\}$ בסיס.

הוכחה: נניח בשלילה כי $\{\psi_n\}$ לא בסיס, כלומר

$$\left(\operatorname{span}\{\psi_n\}\right)^{\perp} \neq \{0\}$$

נסמן $\psi_0 \in (\operatorname{span}\{\psi_n\})^{\perp}$ עם $||\psi_0|| = 1$, נבחר N גדול מספיק כך שמתקיים

$$\sum_{n>N} ||\varphi_n - \psi_n||^2 < 1$$

מהלמה, קיים $w \in (\operatorname{span}\{\psi_0, \ldots, \psi_N\})$, עם $||w|| = 1$, כך שמתקיים $\varphi_j \perp w$ לכל $1 \le j \le N$ (הראשון זה מרחב ממימד $N+1$, השני ממימד N). כעת מתקיים

$$\begin{aligned} 1 &= ||w||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle w, \varphi_n \rangle|^2 = \sum_{n>N} |\langle w, \varphi_n \rangle|^2 = \\ &= \sum_{n>N} |\langle w, \varphi_n - \psi_n \rangle|^2 \le ||w||^2 \sum_{n>N} ||\varphi_n - \psi_n|| < 1 \end{aligned}$$

בסתירה. $\blacksquare$

2 מרחב L^2

משפט 2.1 $\left(L^2([a,b]), \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$, כאשר

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot \overline{g}$$

הינו מרחב ההשלמה של $(C([a,b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, כלומר $L^2([a,b])$ הוא מרחב הילברט, ובו $C([a,b])$ תת קבוצה צפופה.

טענה 2.2 יהיו $\{\phi_i\}, \{\varphi_j\}$ בסיסים אורתונורמליים של פונקציות רציפות במרחב $L^2([a,b])$. נגדיר

$$\psi_{ij}(t,s) = \varphi_j(t)\,\psi_i(s)$$

אזי $\{\psi_{ij}\}$ בסיס אורתונורמלי של $L^2\left([a,b]^2\right)$.

הוכחה: ניזכר כי בהינתן מערכת אורתונורמלית, היא בסיס אם ורק אם שוויון פרסבל נכון לגביה לכל ווקטור במרחב. מספיק להראות זאת על קבוצה צפופה, למעשה.

$\{\psi_{ij}\}$ מערכת אורתונורמלית, לכן מספיק להוכיח שכל פונקציה רציפה $f \in C\left([a,b]^2\right)$ מתקיים

$$||f||^2 = \sum_{i,j} |\langle f, \psi_{ij} \rangle|^2$$

נקבע i, ואז נכתוב

$$a_i(t) = \int_a^b f(t,s)\,\overline{\phi_i}\,\mathrm{d}s$$

f רציפה ולכן a_i רציפה כפונקציה של t. כעת מתקיים

$$\sum_i |a_i(t)|^2 = \int_a^b |f(t,s)|^2 \, \mathrm{d}s$$

מזהות פרסבל. כעת, נגדיר

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle f, \psi_{ij}\rangle = \int_a^b \int_a^b f(t,s)\, \overline{\varphi_j(t)\,\phi_i(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_a^b \overline{\varphi_j(t)} \int_a^b f(t,s)\,\overline{\phi_i(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_a^b a_i(t)\,\overline{\varphi_j(t)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

כעת שוב מזהות פרסבל

$$\sum_j |a_{ij}|^2 = \sum_j |\langle a_i, \varphi_j\rangle|^2 = ||a_i||^2$$

ולכן

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 &= \sum_i ||a_i||^2 = \sum_i \int_a^b |a_i(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sum_i |a_i(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \\ &= \int_a^b \int_a^b |f(t,s)|^2 \, \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

וקיבלנו את זהות פרסבל לכל פונקציה רציפה. לכן $\{\psi_{i,j}\}$ אכן בסיס. ■

מסקנה 2.3 $\left\{e^{int+ims}\right\}$ בסיס אורתונורמלי של $L^2\left([-\pi,\pi]^2\right)$.

3 הטלה על קבוצות קמורות

הגדרה 3.1 K קמורה אם לכל $x,y\in K$ ולכל $\lambda\in[0,1]$ מתקיים $\lambda x+(1-\lambda)y\in K$.

בהנתן מרחב מכפלה פנימית X, נקודה $x\in X$, $K\subseteq X$ תת קבוצה, ניתן להגדיר

$$d(x,K) = \inf_{y\in K} ||x-y||$$

אם K סגורה וקמורה אזי קיים ויחיד $y\in K$ כך שמתקיים $||y-x|| = d(x,K)$.

סימון נסמן

$$P_K x = y$$

טענה 3.2 יהי H מרחב הילברט. תהי $K \subseteq H$ קבוצה קמורה וסגורה, ויהי $x \in H, z \in K$.
אזי $P_K x = z$ אם ורק אם $\mathrm{Re}\left(\langle x-z, y-z\rangle\right) \leq 0$ לכל $y \in K$.

הוכחה: אנחנו נוכיח שאם z הוא ההטלה אז הזהות מתקיימת. הכיוון השני ־ בתרגיל בית.
יהי $y \in K$, נגדיר עבור $\lambda \in [0,1]$ את

$$y_\lambda = \lambda y + (1-\lambda) z \in K$$

כעת,

$$\begin{aligned} 0 &\geq ||x-z||^2 - ||y_\lambda - x||^2 = ||x-z||^2 - ||y_\lambda - z + z - x||^2 = \\ &= ||x-z||^2 - \left(||y_\lambda - z||^2 + ||z-x||^2 + 2\mathrm{Re}\left\langle y_\lambda - z, z-x\right\rangle\right) = \\ &= -\lambda^2 ||y-z||^2 - 2\lambda \mathrm{Re}\left\langle y-z, z-x\right\rangle \end{aligned}$$

בסך הכל

$$\lambda ||y-z||^2 \geq 2\mathrm{Re}\left\langle y-z, x-z\right\rangle$$

ובפרט

$$\mathrm{Re}\left\langle y-z, x-z\right\rangle \leq 0$$

■

טענה 3.3 יהי H מרחב הילברט, ותהי $K \subseteq H$ תת קבוצה קמורה וסגורה. אזי לכל $x, y \in H$ מתקיים:

1.

$$\mathrm{Re}\left\langle P_K x - P_K y, x-y\right\rangle \geq ||p_K x - P_K y||^2$$

2.

$$||x-y|| \geq ||P_K x - P_K y||$$

הוכחה:

1. מהטענה הקודמת, לכל $w \in H$, $z \in K$, מתקיים

$$\mathrm{Re}\,\langle w - P_K w, z - P_K w\rangle \le 0$$

נציב $w = x, z = P_K y$, וכן $w = y, P_K x$, ונקבל

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\langle x - P_K x, P_K y - P_K x\rangle &\le 0 \\ \mathrm{Re}\,\langle y - P_K y, P_K x - P_K y\rangle &\le 0 \end{aligned}$$

נבחר ונקבל

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\langle x - P_K x, P_K y - P_K x\rangle - \langle y - P_K y, P_K y - P_K x\rangle\right) &\le 0 \\ \mathrm{Re}\left(\langle x - y, P_K y - P_K x\rangle\right) + ||P_K y - P_K x||^2 &\le 0 \end{aligned}$$

וסיימנו.

2. נחשב:

$$||x-y||\,||P_K x - P_K y|| \ge |\langle x - y, P_K x - P_K y\rangle| \ge \mathrm{Re}\,\langle x - y, P_K x - P_K y\rangle \ge ||P_K x - P_K y||^2$$

ולכן סיימנו.

■