<u>מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים</u>

© ארזים

14 בנובמבר 2016

הגדרה 0.1 יהי X מרחב נורמי. $x \in X$ תיקרא <u>נקודה קיצונית</u> (נקודת קיצון) של כדור היחידה $B(X)$ אם לכל $a, b \in B(x), \lambda \in (0,1)$ עבורם מתקיים $x = \lambda a + (1-\lambda) b$ מתקיים בהכרח $x = b = a$.

תרגיל הוכיחו כי l_1 לא איזומטרי למרחב $C([0,1])$.

הוכחה: ניקח את e_n להיות הסדרה הקבועה 0 שבמקום n יש לה 1. ברור כי $e_n \in B(l_1)$, נראה כי הן נקודות קיצון. נניח כי $e_n = \lambda x + (1-\lambda) y$, עבור $||x||, ||y|| \le 1$. כלומר מתקיים $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n = 1$. ידוע לנו כי $\sum |x_n|, \sum |y_n| \le 1$, ולכן נקבל כי $|x_n|, |y_n| = 1$, ובסך הכל $|x_n| = |y_n| = 1$. בכל $j \neq n$, מתקיים $\lambda x_j + (1-\lambda) y_j = 0$, ולכן נקבל בסך הכל $e_n = y = x$. לעומת זאת, במרחב $C([0,1])$ יש רק שתי נקודות קיצון: $f \equiv \pm 1$ (קל לבדוק, תרגיל בחדו"א 1). איזומטריה תעביר באופן ברור נקודות קיצון לנקודות קיצון, וזה לא אפשרי כאן. ■

תרגיל הראו כי $C_0^* \cong l_1$.

פתרון יהי $b \in l_1$. נגדיר פונקציונאל על C_0 על ידי:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

עבור $a \in C_0$, מתקיים $||a||_\infty = 1$. כעת,

$$|f(a)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| |b_i| \le ||a||_\infty \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| = ||b||_{l_1}$$

לכן מתקיים

$$||f||_{op} \le ||b||_{l_1}$$

בשביל החסם בכיוון השני, נגדיר

$$y_n = (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$$

ונבחר את a_j באופן הבא:

$$a_j = e^{-i\arg(b_j)}$$

אז מתקיים $|a_j| = 1$ לכל j, ולכן $||y_n||_\infty = 1$. כעת,

$$f\left(y_n\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n} |b_j|$$

לכן מתקיים

$$||f||_{op} \geq \sum_{j=1}^{n} |b_j|$$

וזאת לכל n. לכן למעשה מתקיים

$$||f||_{op} \geq ||b||_{l_1}$$

זה נותן לנו איזומטריה בכיוון אחד. נגדיר גם העתקה בכיוון השני: בהינתן $f \in C_0^*$ נגדיר

$$b_j = f\left(e_j\right)$$

כעת נשתמש באותו y_n שהגדרנו קודם, ונחשב

$$||f||_{op} \geq |f\left(y_n\right)| = \sum_{j=1}^{n} |b_j|$$

וזאת לכל n, ולכן

$$b \in l_1, ||b||_{l_1} \leq ||f||_{op}$$

בכיוון ההפוך, חוזרים על מה שכבר עשינו.

0.1 מכפלה פנימית

הגדרה 0.2 יהי X מרחב לינארי. פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ נקראת מכפלה פנימית אם:

1. לכל $x \in X$, $\langle x, x \rangle \geq 0$, וכן $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
2. לינאריות במשתנה הראשון:

$$\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$$

3. הרמיטיות:

$$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$$

הערה 0.3 כל מכפלה פנימית משרה נורמה על ידי $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. לא כל נורמה היא מושרית ממכפלה פנימית - תנאי שקול לזה שכן הוא שוויון המקבילית (בתרגיל בית).

דוגמא ניקח $g \in C([a,b])$ חיובית. נגדיר

$$\langle f,h\rangle = \int_a^b f(x) \cdot \overline{h(x)} g(x) \, \mathrm{d}x$$

זה מגדיר פרה מכפלה פנימית על $R([a,b])$, ומכפלה פנימית על $C([a,b])$.

משפט 0.4 (אי שוויון קושי שוורץ) יהי X מרחב מכפלה פנימית, $x,y \in X$, אזי

$$|\langle x,y\rangle| \leq ||x|| \, ||y||$$

תרגיל הוכיחו את אי שוויון קושי שוורץ כמסקנה מאי שוויון בסל.

טענה 0.5 מכפלה פנימית היא פונקציה רציפה בשני המשתנים.

הוכחה: יהיו $u,w \in X$. ניקח סדרה $\{u_n\} \subseteq X$ עבורה $u_n \to u$ (בנורמה). כעת, מתקיים

$$\begin{aligned} \left|\lim_{n\to\infty} \langle u_n,w\rangle - \langle u,w\rangle\right| &= \left|\lim_{n\to\infty} \langle u_n - u,w\rangle\right| = \lim_{n\to\infty} |\langle u_n - u,w\rangle| \leq \\ &\leq \lim_{n\to\infty} ||u_n - u|| \, ||w|| = 0 \end{aligned}$$

בקואורדינטה השנייה - באותה צורה. ■

תרגיל יהי X מרחב מכפלה פנימית, ויהי $E \subseteq X$ תת מרחב. הראו כי $E^{\perp} = \{y \in X \mid \forall x \in E \quad \langle x,y\rangle = 0\}$ הוא תת מרחב סגור.

פתרון תהי $\{u_n\} \subseteq E^{\perp}$ סדרה מתכנסת. נסמן

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n$$

כעת, יהי $w \in E$, נקבל

$$\langle w,u\rangle = \left\langle w, \lim_{n\to\infty} u_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle w,u_n\rangle = 0$$

הגדרה 0.6 יהי X מרחב נורמי, $L \subseteq X$. נגדיר

$$\operatorname{dist}(x, L) = \inf_{y \in L} ||x - y||$$

מקרה פרטי: X מרחב מכפלה פנימית. עבור $x \in X, y \in L$, אם $x - y \perp L$, אזי

$$\operatorname{dist}(x, L) = ||x - y||$$

תרגיל יהי X מרחב נורמי, $L \subseteq X$ תת מרחב ממימד סופי. הוכיחו כי לכל $x \in X$ יש קירוב טוב ביותר בתוך L, כלומר ווקטור $y \in L$ עבורו $\operatorname{dist}(x, L) = ||x - y||$.

פתרון תהי $\{y_n\} \subseteq L$ סדרה כך שמתקיים

$$\lim_{n \to \infty} ||x - y_n|| = \operatorname{dist}(x, L)$$

אזי y_n סדרה חסומה במרחב סוף מימדי, ולכן קיימת לה תת סדרה מתכנסת $y_{n_k} \to y_0$. כעת

$$||x - y_0|| = \left|\left| x - \lim_{k \to \infty} y_{n_k} \right|\right| = \lim_{k \to \infty} ||x - y_{n_k}|| = \operatorname{dist}(x, L)$$

משפט 0.7 יהי X מרחב מכפלה פנימית, ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית. נסמן $L = \operatorname{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. אזי הטענות הבאות שקולות:

1. $x \in \overline{L}$.
2. $x = \sum \langle x, e_n \rangle e_n$
3. $||x||^2 = \sum |\langle x, e_n \rangle|^2$

הערה 0.8 (אי שוויון בסל) תחת התנאים של המשפט,

$$||x||^2 \geq \sum |\langle x, e_n \rangle|^2$$

למה 0.9 (הלמה של רימן לבג)

$$\langle x, e_n \rangle \to 0$$

לכל $x \in X$.