מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

7 בנובמבר 2016

1 חצי נורמה

הגדרה 1.1 יהי X מרחב לינארי מעל שדה $\mathbb{F}$. p נקראת חצי נורמה (סמי נורמה) אם $p : X \to \{a \geq 0\}$ ומקיימת

1. $p(0) = 0$
2. $\forall x \in X \forall a \in \mathbb{F} \;\; p(ax) = |a| \, p(x)$
3. $\forall x, y \in X \;\; p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

הערה 1.2 נסמן $X_0 = \ker p = \{x \in X \mid p(x) = 0\}$, וברור שזהו תת מרחב.

טענה 1.3 יהי X $x \in X$. אזי $p(x+y)$ לא תלוי בבחירה של $y \in X_0$.

הוכחה: יהיו $y_1, y_2 \in X_0$. אזי

$$p(x+y_1) \leq p(x+y_2) + p(y_1 - y_2) = p(x+y_2)$$

אותו טיעון עובד בכיוון ההפוך (y_1, y_2 סימטריים). ■

מסקנה 1.4 p מגדירה נורמה על X / X_0.

דוגמא נגדיר

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

לכל f כך שהפונקציה $|f|$ אינטגרבילית רימן בקטע $[0, 1]$.

2 כדור היחידה

יהי $(X,||\cdot||)$ מרחב נורמי.

הגדרה 2.1 נגדיר את <u>כדור היחידה</u> של X להיות

$$B\left(X\right)=\left\{x\in X\mid ||x||\leq 1\right\}$$

תכונות

1. סימטריה: $x\in B\left(x\right)\Rightarrow -x\in B\left(x\right)$
2. קמירות: לכל $x,y\in B\left(x\right)$ ולכל $\lambda\in\left[0,1\right]$, מתקיים $||\lambda x+\left(1-\lambda\right)y||\leq\lambda||x||+\left(1-\lambda\right)||y||\leq 1$, כלומר $\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\in B\left(X\right)$.
3. $0\in B\left(X\right)$.
4. $B\left(X\right)$ קבוצה חסומה.

סימונים

$$\begin{aligned}A+B &= \left\{a+b\mid a\in A,b\in B\right\}\\ \lambda A &= \left\{\lambda a\mid a\in A\right\}\end{aligned}$$

הגדרה 2.2 בהינתן $K\subseteq X$ המקיימת את תכונות $1,2,3$ של כדור היחידה, נגדיר את <u>פונקציונאל מינקובסקי</u>:

$$||x||_k=\inf\left\{\lambda>0\mid x\in\lambda K\right\}$$

טענה 2.3 $||\cdot||_K$ היא חצי נורמה.

הוכחה: $0\in K$, ולכן $||0||_k=0$. כמו כן,

$$\begin{aligned}||ax||_k &= \inf\left\{\lambda>0\mid ax\in\lambda K\right\}=\inf\left\{\lambda>0\mid x\in\frac{\lambda}{|a|}K\right\}=\\ &= \inf\left\{|a|\cdot\lambda>0\mid x\in\lambda K\right\}=|a|\cdot||x||_K\end{aligned}$$

כאשר ניצלנו כאן את הסימטריה של K. כעת, עבור $x,y\in X$, יהיו $\alpha,\beta>0$ כך שמתקיים $x\in\alpha K,y\in\beta K$. לכן $x+y\in\alpha K+\beta K$, וכעת

$$\alpha K+\beta K=\left(\alpha+\beta\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}K+\frac{\beta}{\alpha+\beta}K\right)\subseteq\left(\alpha+\beta\right)K$$

כאן השתמשנו בקמירות. אינפימום נשמר באי שוויון, ולכן נקבל את אי שוויון המשולש:

$$||x||_k+||y||_k\geq||x+y||_k$$

■

הערה 2.4 אם K מקיימת גם את תכונה 4, אזי $||\cdot||_K$.

דוגמא כאשר K לא חסומה, למשל מישור בתוך $\mathbb{R}^3$, נקבל $||x||_k = 0$ לכל $x \in K$.

3 עוצמות של נורמות

הגדרה 3.1 יהי X מרחב לינארי ועליו מוגדרות 2 נורמות φ, ψ. נאמר שהנורמה φ חזקה מהנורמה ψ אם התכנסות לפי φ גוררת התכנסות לפי ψ. באופן שקול, אם קיים קבוע $c > 0$ עבורו לכל $x \in X$ מתקיים

$$\psi(x) \leq c \cdot \varphi(x)$$

תרגיל יהי $1 \leq q < p$. הוכיחו כי $||\cdot||_q$ חזקה יותר מאשר $||\cdot||_p$.

פתרון תהי $\{x_n\}$ סדרה כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$$

כעת נראה כי גם

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

בהכרח, קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|x_n|^q < 1$, כלומר $|x_n| < 1$. כעת,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{N} |x_n|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \leq \sum_{n=1}^{N} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$$

מסקנה 3.2 עבור $1 \leq q < p$, מתקיים $l_q \subseteq l_p$.

הגדרה 3.3 יהיו X, Y מרחבים נורמיים, ויהי $T : X \to Y$ אופרטור לינארי. נגדיר את הנורמה האופרטורית שלו:

$$||T||_{op} = \sup_{||x||=1} ||Tx|| = \sup_{||x||\leq 1} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = \inf \{c > 0 \mid \forall x \in X \quad ||Tx|| \leq c \cdot ||x||\}$$

סימון $\mathcal{L}(X, Y)$ - אופרטורים לינאריים חסומים מהמרחב X אל המרחב Y. כמו כן, $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$.

מסקנה 3.4 עבור $T \in \mathcal{L}\left(X,Y\right)$ מתקיים לכל $x \in X$

$$||Tx|| \leq ||T||\,||x||$$

תרגיל יהיו $T \in \mathcal{L}\left(X,Y\right)$, $S \in \mathcal{L}\left(Y,Z\right)$, אזי

$$||ST|| \leq ||S||\,||T||$$

פתרון

$$||ST|| = \sup_{||x||=1} ||S\left(Tx\right)|| \leq \sup_{||x||=1} ||S||\,||Tx|| = ||S|| \sup_{||x||=1} ||Tx|| = ||S||\,||T||$$