מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

31 באוקטובר 2016

1 מרחבים וקטוריים לינאריים

לרוב נדון במרחבים מעל השדות $\mathbb{R},\mathbb{C}$ (ולמעשה לרוב מעל $\mathbb{C}$).
מרחב ווקטורי הוא אוסף של אובייקטים עם פעולת חיבור וכפל בסקלר מהשדה.
דוגמאות: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $P_n\left[x\right]$, $C\left[0,1\right]$.

1.1 העתקות לינאריות

הגדרה 1.1 בהינתן שני מרחבים לינאריים E_1,E_2 מעל אותו שדה, העתקה $A:E_1\to E_2$ נקראת לינארית אם לכל שני סקלרים a,b ולכל $x,y\in E_1$ מתקיים

$$A\left(ax+by\right)=aA\left(x\right)+bA\left(y\right)$$

הגרעין:

$$\ker A=\left\{x\in E_1\mid Ax=0\right\}\subseteq E_1$$

התמונה:

$$\mathrm{Im}A=\left\{Ax\mid x\in E_1\right\}\subseteq E_2$$

אם $\mathrm{Im}A=E_2$ וגם $\ker A=\left\{0\right\}$ (כלומר A חד־חד־ערכית ועל) A נקראת איזומורפיזם (A הפיכה).

1.2 תתי מרחבים

$E_1\subseteq E_2$ כך שגם E_1 מרחב לינארי אומר שהמרחב E_1 הוא תת מרחב של E_2.
העתקת שיכון (הומומורפיזם): העתקה ששומרת על מבנה. למשל:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \hookrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (a,b) & \to & (a,b,0)\end{array}$$

דוגמאות:

.1

$$S_0 = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \exists N . \forall n \geq N \;\; a_n = 0\}$$

.2

$$C_0 = \left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$$

.3

$$C = \left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \exists \lim_{n\to\infty} a_n\right\}$$

.4

$$l_\infty = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \exists M . \forall n \;\; |a_n| \leq M\}$$

.5

$$S = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\}$$

יש כאן שיכונים:

$$S_0 \hookrightarrow C_0 \hookrightarrow C \hookrightarrow l_\infty \hookrightarrow S$$

הגדרה 1.2 וקטורים $x_1, \ldots, x_n \in X$ נקראים בלתי תלויים לינארית אם

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \iff \forall i \;\; a_i = 0$$

אחרת נאמר שהם תלויים לינארית. עבור קבוצות אינסופיות, $\{x_1, x_2, \ldots\}$ בלתי תלויים לינארית אם לכל N, $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ בלתי תלויים לינארית.

משפט 1.3 אם $x_1, \ldots, x_n$ קבוצה בלתי תלויה מקסימלית בתוך X, אזי $\{x_1, \ldots, x_n\}$בסיס של X, והמספר n אינו תלוי בבחירת וקטורי הבסיס. במקרה זה נסמן את המימד של X: $\dim X = n$.

הערה 1.4 אם קיימת קבוצה אינסופית של וקטורים בלתי תלויים לינארית, נסמן $\dim X = \infty$.

1.3 מרחבי מנה

הגדרה 1.5 יהי X מרחב לינארי, ויהי X' תת מרחב. נגדיר את המנה:

$$X/X' = \{x + X' \mid x \in X\}$$

נסמן $[x] = x+X'$ - מחלקת השקילות של הווקטור x. $y \in [x]$ אם ורק אם $x-y \in X'$, אם ורק אם $[x] = [y]$.

דוגמאות

1.

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

2. מנה של חבורות:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1)$$

טענה 1.6

$$[x] = [y] \iff [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

הוכחה: $\Rightarrow$: טריוויאלי.
$\Leftarrow$: יהי $z \in [x] \cap [y]$. $z \in [x]$, כלומר $z - x \in X'$. $z \in [y]$, כלומר $z - y \in X'$. בסך הכל, $(z-y) - (z-x) = x - y \in X'$. ■

מרחב מנה הוא מרחב לינארי עם הפעולות:

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x+y] \\ a\,[x] &= [ax] \end{aligned}$$

דוגמאות ראינו כי $C_0 \subseteq C$. נוכיח כי

$$\operatorname{Codim}(C_0) = \dim\left(C/C_0\right) = 1$$

נסמן

$$e = \{1, 1, 1, \ldots\}$$

עבור $x = \{x_i\} \in C$, נסמן את הגבול שלה בתור a. נשים לב שמתקיים

$$\lim_{i\to\infty} x_i - a \cdot e_i = 0$$

כלומר מתקיים $x - ae \in C_0$, ולכן $[x] = a\,[e]$, כלומר מחלקת השקילות של כל וקטור היא כפולה של מחלקת השקילות של e ־ כלומר מימד המנה הוא 1.

הגדרה 1.7 יהיו $x_1, \ldots, x_n \in X$ וקטורים ויהי X' תת מרחב. נאמר כי $x_1, \ldots, x_n$ בלתי תלויים לינארית <u>ביחס</u> למרחב X' אם

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in X' \iff \forall i \ \ a_i = 0$$

למה 1.8 $\dim\left(X/X'\right) = n$ אם ורק אם קיימים $x_1, \ldots, x_n \in X$ בלתי תלויים ביחס למרחב X' כך שלכל $x \in X$ קיימת הצגה יחידה

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + y$$

כאשר $y \in X'$.

הוכחה: $\Rightarrow$: תרגיל.
$\Leftarrow$: נבחר $[x_1], \ldots, [x_n]$ בסיס של X/X'. נראה כי $x_1, \ldots, x_n$ בלתי תלויים לינארית ביחס למרחב X'. נניח כי

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in X'$$

נשים לב כי

$$[0] = [X'] = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i\,[x_i]$$

וכעת משום שבחרנו את המחלקות כבסיס, נקבל כי $a_i = 0$ לכל i.
כעת, יהי $[x] \in X/X'$. יש הצגה (יחידה)

$$[x] = \sum_{i=1}^{n} a_i\,[x_i]$$

לכן קיימת הצגה כלשהי

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + y$$

כאשר $y \in X'$.
נותר להראות כי הצגה זו יחידה. נניח כי מתקיים גם

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + z$$

כאשר $z \in X'$. כעת,

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) x_i = y - z \in X'$$

ניזכר כי $\{x_i\}$ בלתי תלויים לינארית ביחס למרחב X', ולכן לכל i $a_i = b_i$, ולכן גם $y = z$. ■

1.4 נורמה

הגדרה 1.9 פונקציה $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}^+$ נקראת <u>נורמה</u> אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $||\alpha|| \geq 0$, וכן $||\alpha|| = 0$ אם ורק אם $\alpha = 0$.
2. $||a \cdot \alpha|| = |a| \, ||\alpha||$
3. $||\alpha + \beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||$

<u>מרחב נורמי</u> הוא צמד $(X, ||\cdot||)$.

דוגמאות

1. נורמה אוקלידית במרחב $\mathbb{R}^n$:

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

2. במרחב l_∞ - אוסף הסדרות החסומות -

$$||\{a_n\}||_\infty = \sup_n |a_n|$$

3. במרחב l_1 - אוסף כל הסדרות $\{a_n\}$ כך שמתקיים $||\{a_n\}||_1 = \sum |a_n| < \infty$
4. במרחב l_p - $||\{a_n\}||_p = \left(\sum |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ עבור $p \geq 1$
5. במרחב $C[0,1]$,

$$||f|| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

1.4.1 מרחבי מנה נורמיים

יהי X מרחב נורמי, ויהי X' תת מרחב סגור (גבול של כל סדרה מתכנסת שייך למרחב).

משפט 1.10 הנורמה על X/X' המוגדרת על ידי

$$||[x]|| = \inf_{y\in X'} ||x-y||$$

מוגדרת היטב ואינה תלויה בבחירת הנציג.