מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

27 בנובמבר 2016

1 מרחבי הילברט

1.1 בסיס

טענה 1.1 יהי H מרחב הילברט ספרבילי, ותהי $e_n \in H$ סדרה אורתונורמלית ושלמה. אזי ההעתקה

$$\begin{aligned} T : H &\to l_2 \\ Tx &= (\langle x, e_n \rangle) \end{aligned}$$

היא איזומטריה על l_2. כמו כן, לכל $x \in H$ קיים פירוק יחיד

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_n e_n$$

עבור $a_n = \langle x, e_n \rangle$.

הוכחה: ראינו כבר בעבר את כל חלקי הטענה, פרט ליחידות a_n. נניח כי $x = \sum a_n e_n$, ונראה כי $a_n = \langle x, e_n \rangle$. נשים לב כי

$$\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, e_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle e_n, e_k \rangle = a_n$$

■

הגדרה 1.2 $X \supseteq (x_n)$ נקראת בסיס (שאודר) אם לכל $x \in X$ קיים פירוק יחיד $x = \sum a_n x_n$.

מסקנה 1.3 סדרה אורתונורמלית שלמה במרחב הילברט היא בסיס.

דוגמא במרחב $X = C[-1,1]$, הסדרה $f_n(x) = x^n$ שלמה. ברור כי הווקטורים בה בלתי תלויים לינארית. נראה כי היא לא בסיס. נניח כי עבור f כלשהי יש פירוק יחיד

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$$

בפרט הטור מתכנס בנקודה $x=1$, ולכן הטור הוא טור חזקות שמתכנס לפחות בתוך כדור היחידה. לא כל פונקציה רציפה אפשר להביע ככה - למשל $f(x)=|x|$.

טענה 1.4 $g_n=x^{3n}$ שלמה במרחב $C[-1,1]$ (היה בתרגול).

דוגמא נגדיר את הפולינומים של לז'נדר להיות הסדרה $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $p_n\perp p_k$ לכל $k<n$.

משפט 1.5 אם $p_n(t_0)=0$ אז $t_0\in[-1,1]$.

הוכחה: אם $p_n(t_0)=0$, אזי קיים $q\in\operatorname{span}\{p_i\}_{i<n}$ כך שמתקיים

$$p_n(t)=(t-t_0)\,q(t)$$

וכעת

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-1}^{1} p_n(t)\,\overline{q_n(t)}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(tq(t)-t_0q(t))\,\overline{q(t)}\,\mathrm{d}t\\ t_0\int_{-1}^{1}|q(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1}t\,|q(t)|^2\,\mathrm{d}t\\ t_0 &= \frac{\int_{-1}^{1}t\,|q(t)|^2\,\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1}|q(t)|^2\,\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

ומחדוא 2, סיימנו. ■

באופן כללי, עבור $\varphi>0$, נגדיר

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(t)\,\overline{g(t)}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

ולפי מכפלה פנימית זו, אם נגדיר שוב פולינומים עם התכונה של פולינומי לז'נדר, נקבל שהשורשים שלהם כולם בקטע $[-1,1]$ (תרגיל).

1.2 השלמה של מרחב

הגדרה 1.6 בהינתן מרחב מכפלה פנימית E ומערכת $\{e_n\}$ אורתוגונלית ושלמה, ראינו את האיזומטריה $T:X\to L\subseteq l_2$ על ידי

$$Tx=(\langle x,e_n\rangle)$$

אזי $\overline{L}$ נקרא ההשלמה של X.

דוגמא נראה מרחב שאינו ספרבילי. נגדיר את המרחב

$$E = \operatorname{span}\left\{e^{i\lambda t}\right\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$$

נוכל להגדיר כעת מכפלה פנימית

$$\langle f,g\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f\left(t\right)\overline{g\left(t\right)}\,\mathrm{d}t$$

נגדיר

$$f_{\lambda}\left(t\right) = e^{i\lambda t}$$

וכן

$$\delta_{\lambda,\mu} = \langle f_{\lambda},f_{\mu}\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} e^{i\lambda t}\overline{e^{i\mu t}}\,\mathrm{d}t$$

אם $\lambda=\mu$, נקבל 1. אחרת

$$\begin{aligned}\delta_{\lambda,\mu} &= \left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} e^{i(\lambda-\mu)t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{1}{i\left(\lambda-\mu\right)}e^{i(\lambda-\mu)t}\right| \leq \\ &\leq \lim_{T\to\infty}\frac{2}{2T\left(\lambda-\mu\right)} = 0\end{aligned}$$

לכן המערכת היא אורתונורמלית. נראה כי זה אומר שהמרחב אינו ספרבילי. נניח כי V צפופה. אזי לכל λ קיים $x_{\lambda}\in V$ כך שמתקיים

$$||f_{\lambda}-x\lambda|| < \frac{1}{2}$$

נבדוק שאם $\mu\neq\lambda$ אזי $x_{\mu}\neq x_{\lambda}$. מתקיים

$$\begin{aligned}||x_{\lambda}-x_{\mu}|| &= ||(x_{\lambda}-f_{\lambda})+(f_{\lambda}-f_{\mu})+(f_{\mu}-x_{\mu})|| \geq \\ &\geq ||f_{\lambda}-f_{\mu}||-||x_{\lambda}-f_{\lambda}||-||f_{\mu}-x_{\mu}|| > \\ &> ||f_{\lambda}-f_{\mu}||-1 = \sqrt{2}-1 > 0\end{aligned}$$

לכן $|V|\geq$ א.

1.3 הטלה מינימלית

תהי $H \supseteq E \supseteq (e_n)$ סדרה אורתונורמלית שלמה בתוך E. ראינו כי הפונקציה

$$P_E x = \sum \langle x, e_n \rangle e_n$$

מגדירה היטל על הסגור של E.

הגדרה 1.7 במרחב ווקטורי L, קבוצה V תקרא קמורה אם לכל $\theta \in (0,1)$ מתקיים

$$\theta x + (1-\theta) y \in V$$

לכל $x, y \in V$.

משפט 1.8 (ההטלה המינימלית של ריס) יהי H מרחב הילברט, ותהי V תת קבוצה קמורה וסגורה. אזי לכל $x \in H$ קיים יחיד $y \in V$ כך שמתקיים

$$||x-y|| = d(x,V) := \inf_{z \in V} ||x-z||$$

הוכחה: לפי הגדרת המרחק, קיימת סדרה $y_n \in V$ כך שמתקיים

$$||x-y_n|| \to d(x,V)$$

נבדוק כי y_n סדרת קושי:

$$y_n - y_m = (x-y_m) - (x-y_n)$$

נסמן $z_n = x - y_n$ ואז

$$||y_n - y_m||^2 = ||z_n - z_m||^2 = -||z_n + z_m||^2 + 2||z_n||^2 + 2||z_m||^2$$

מתקיים

$$\frac{z_n + z_m}{2} = x - \frac{y_n + y_m}{2} \in x - V$$

ולכן

$$||z_n + z_m|| \cdot \frac{1}{2} \leq d$$

כלומר

$$||y_n - y_m||^2 \leq 2\,||z_n||^2 + 2\,||z_m||^2 - 4d^2 \to 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

לכן לסדרה y_n יש גבול (כי H מרחב הילברט). הגבול $y \in V$ שכן V סגור ומרציפות $||x-y|| = d\left(x,V\right)$. ■

משפט 1.9 יהי H מרחב הילברט, ונניח כי $L \subseteq H$ תת מרחב סגור, אזי לכל $x \in H$ קיים ויחיד $y \in L$ עד שמתקיים $x - y \perp L$. מסמנים $y = y\left(x\right) = P_L x$.

הוכחה: הקבוצה L היא כמובן קמורה וסגורה, ואז לכל x קיים $y = P_L^{\min} x$ כמו במשפט הקודם. נבדוק כי $x - y \perp L$. למעשה יש להוכיח כי לכל $z \in L$ מתקיים

$$\langle x-y,z\rangle = 0$$

נגדיר

$$\varphi\left(\lambda\right) = ||x - y - \lambda z||^2$$

לכל $\lambda \in \mathbb{C}$ מתקיים $y - \lambda z \in L$, ולכן

$$\varphi\left(\lambda\right) \geq d\left(x,L\right)^2 = ||x-y||^2 = \varphi\left(0\right)$$

לכן 0 היא מינימום של הפונקציה. כעת, נציב $\lambda = t\left\langle x-y,z\right\rangle$ ונחשב:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\lambda\right) &= ||x-y||^2 - 2\mathrm{Re}\left\langle x-y,\lambda z\right\rangle + |\lambda|^2\,||z||^2 = \\ &= ||x-y||^2 - 2\mathrm{Re}\left(t\left|\left\langle x-y,z\right\rangle\right|^2\right) + t^2\left|\left\langle x-y,z\right\rangle\right|^2||z||^2 =: \psi\left(t\right)\end{aligned}$$

לפונקציה יש מינימום בנקודה 0, והיא גזירה, ולכן הנגזרת שלה מתאפסת בנקודה 0. לכן

$$\left|\left\langle x-y,z\right\rangle\right|^2 = 0$$

נותר להראות את יחידות y. ניקח y_1, y_2 עבורם $x - y_1 \perp L, x - y_2 \perp L$. אזי מתקיים

$$y_1 - y_2 = \left(x - y_2\right) - \left(x - y_1\right) \perp L$$

אבל $y_1 - y_2 \in L$, ולכן מאונך לעצמו, כלומר 0. לכן $y_1 = y_2$. ■

טענה 1.10 $P_L \in \mathcal{L}\left(H\right)$, וכן

$$\begin{aligned} P_L^2 &= P_L \\ ||P_L|| &= 1 \end{aligned}$$

לכל $L \neq \{0\}$.

הוכחה: יהיו $x_1, x_2 \in H$, λ_1, λ_2 סקלרים, ונגדיר $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.

$$x - \lambda_1 P_L x_1 - \lambda_2 P_L x_2 = \lambda_1 (x_1 - P_L x_1) - y_2 (x_2 - P_L x_2) \perp L$$

קיבלנו כי P_L אכן לינארית. כעת ידוע כי

$$P_L x \in L, x - P_L x \perp L$$

ולכן $P_L x \perp x - P_L x$, כלור

$$\begin{aligned} x &= P_L x + (x - P_L x) \\ ||x||^2 &= ||P_L x||^2 + ||x - P_L x||^2 \geq ||P_L x||^2 \end{aligned}$$

לכן נקבל $P_L \in \mathcal{L}(H)$, וכן $||P_L|| \leq 1$. אם $x \in L$, אזי ברור כי $P_L(x) = x$. ■

1.4 משלים ניצב

הגדרה 1.11 יהי H מרחב הילברט, ותהי $V \subseteq H$ תת קבוצה. נגדיר

$$V^{\perp} = \{x \in H \mid \forall y \in V \ \ x \perp y\}$$

זהו <u>המשלים האורתוגונלי</u> של V.

מתקיים

$$V^L = \bigcap_{y \in V} \{y\}^{\perp}$$

כל $\{y\}^{\perp}$הוא תת מרחב סגור, ולכן גם $V^{\perp}$ תת מרחב סגור.

מסקנה 1.12 יהי H מרחב הילברט, ויהי $L \subseteq H$ תת מרחב סגור, אזי

$$\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = L$$

הוכחה: קיים פירוק יחיד $x = y + z$ לכל x כאשר $y \in L, z \in L^{\perp}$. אם $x \in L$, לכל $y \in L^{\perp}$ מתקיים $x \perp y$ ואז $x \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$.

כעת נותר להראות כי $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq L$. יהי $x \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$. נוכל לכתוב

$$x = P_L x + (x - P_L x)$$

כמובן $P_L x \in L \subseteq \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$, $x - P_L x \in L^{\perp}$, ולכן קיבלנו את הפירוק של x בהטלה למרחב $L^{\perp}$. אבל יש עוד פירוק כזה - $x + 0$. לכן $x - P_L x = 0$, כלומר $x = P_L x \in L$.■

מסקנה 1.13 אם H מרחב הילברט, $V \subseteq H$, אזי

$$\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\mathrm{span} V}$$

הוכחה: ברור כי $V \subseteq \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$, ואז $\overline{\mathrm{span} V} \subseteq \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$. נסמן $L = \overline{\mathrm{span} V}$. כעת

$$V \subseteq L \iff L^{\perp} \subseteq V^{\perp} \iff L = L^{\perp^{\perp}} \supseteq V^{\perp^{\perp}}$$

וסיימנו. ∎

מסקנה 1.14 $\{x_n\} \subseteq H$ שלמה אם ורק אם $\{(x_n)\}^{\perp} = \{0\}$.

הוכחה:

$$\overline{\mathrm{span}\left(\{x_n\}\right)} = \{x_n\}^{\perp^{\perp}}$$

כעת, זה שווה H אם ורק אם

$$\{x_n\}^{\perp^{\perp^{\perp}}} = \{x_n\}^{\perp} = \{0\}$$

∎

2 פונקציונאלים לינאריים

2.1 מרחבים לינאריים כלליים

הגדרה 2.1 נניח כי X מרחב לינארי מעל השדה $\mathbb{K}$. נגדיר כעת:

$$X^{\#} = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \in \mathrm{Lin}\left(X, \mathbb{K}\right)\}$$

כל האיברים בו נקראים פונקציונאלים.
הגרעי של הפונקציונאל מוגדר כרגיל.

טענה 2.2 יהי $0 \neq f \in X^{\#}$. אזי $\mathrm{codim} \ker f = 1$.

הוכחה: $f \neq 0$, ולכן $X / \ker f \neq \{0\}$. ניקח x עבורו $f\left(x\right) \neq 0$. נגדיר $y = \frac{x}{f(x)}$. אזי מתקיים $[y] \neq 0$, ונבדוק שמתקיים

$$[z] = f\left(z\right)[y]$$

זה שקול לכך שמתקיים

$$\begin{aligned} [z - f(z)\,y] &= 0 \\ f(z - f(z)\,y) &= 0 \\ f(z)\,(1 - f(y)) &= 0 \end{aligned}$$

ובחרנו את y כך שיתקיים

$$f(y) = 1$$

לכן סיימנו. ■

טענה 2.3 אם $L \subseteq X$ תת מרחב עבורו $\mathrm{codim} L = 1$, אזי קיים פונקציונאל $f \in X^{\#}$ כך שמתקיים $L = \ker f$.

הוכחה: X/L ממימד 1, ולכן קיים $z \in X \backslash L$ כך שלכל $x \in X$ קיים λ יחיד עבורו

$$[x] = \lambda\,[z]$$

ברור כי ההתאמה הזו בין x לבין λ היא פונקציונאל לינארי שגרעינו L. ■

טענה 2.4 נניח כי $f, g \in X^{\#}$, ונניח כי $\ker f \subseteq \ker g$. אזי קיים λ עבורו $g = \lambda f$.

הוכחה: אם $\ker f = X$ אזי $f = 0$, $g = 0$, $\lambda = 0$. לכן בלי הגבלת הכלליות קיים $y \in X$ עבורו $f(y) \neq 0$. יהי $x \in X$, ונשים לב כי

$$x - f(x)\,\frac{y}{f(y)} \in \ker f$$

בחישוב דומה לפני שתי טענות הוכחנו את השייכות הזו:

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(y)}y\right) = f(x) - f(x)\,\frac{f(y)}{f(y)} = 0$$

כעת מתקיים גם

$$\begin{aligned} g\left(x - f(x)\,\frac{y}{f(y)}\right) &= g(x) - \frac{f(x)}{f(y)}g(y) = 0 \\ g(x) &= \frac{g(y)}{f(y)}f(x) \end{aligned}$$

וזה נכון לכל x: נגדיר $\lambda = \frac{g(y)}{f(y)}$ ונסיים. ■

2.2 מרחבים נורמיים

הגדרה 2.5 יהי X מרחב נורמי. אזי נסמן

$$X^{\#} \cap \mathcal{L}(x, \mathbb{K}) = X^*$$

מרחב זה נקרא <u>המרחב הדואלי</u> או <u>הצמוד</u> של X.
זה מרחב נורמי עם הנורמה שכבר ראינו

$$||f|| = \sup_{||x|| \leq 1} |f(x)|$$

טענה 2.6 אם $f \in X^{\#}$, אזי f חסום אם ורק אם $\ker f$ הוא תת מרחב סגור.

הוכחה: אם f חסומה, אז

$$\ker f = f^{-1}(\{0\})$$

אבל f רציפה, ולכן תמונה הפוכה של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה.
כעת, אם $\ker f$ סגור, נניח בשלילה כי f אינה חסומה. כלומר קיימים x_n, $||x_n|| \leq 1$, כך שמתקיים $f(x_n) \to \infty$. אפשר לבחור אותם כך שמתקיים $f(x_n) \neq 0$. נגדיר

$$y_n = \frac{x_n}{f(x_n)} \to 0$$

כמובן מתקיים

$$f(y_n) = 1$$

$y_n \notin \ker f$ כתוצאה מזה. עכשיו נגדיר

$$z_n = y_n - y_1$$

נקבל

$$f(z_n) = 0$$

כלומר $z_n \in \ker f$. כמו כן $z_n \to -y_1 \notin \ker f$ בסתירה. ■