מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

ⓒ ארזים

13 בנובמבר 2016

1 מכפלה פנימית

בשיעור שעבר הגדרנו מכפלה פנימית ופרה מכפלה פנימית, וראינו את אי שוויון קושי שוורץ:

$$|\langle x,y\rangle| \le \sqrt{\langle x,x\rangle \langle y,y\rangle} = ||x||\,||y||$$

השוויון מתקיים אם ורק אם x,y תלויים לינארית. **הוכחה:** ראשית, אפשר בלי הגבלת הכלליות להניח $x,y\neq 0$ (אחרת הטענה ברורה). נניח כי יש שוויון ונסמן

$$z = x\overline{\langle x,y\rangle} - y\,||x||^2$$

נבדוק ונראה כי $z=0$.

$$\begin{aligned} ||z||^2 &= \langle z,z\rangle = ||x||^2 \left(\overline{\langle x,y\rangle}\right)^2 - 2\mathrm{Re}\left(\left\langle x\overline{\langle x,y\rangle}, y\,||x||^2\right\rangle\right) + ||y||^2\,||x||^4 = \\ &= ||x||^2 \left(||x||\,||y||\right)^2 - 2\mathrm{Re}\left(||x||^2\,\overline{\langle x,y\rangle}\,\langle x,y\rangle\right) + ||y||^2\,||x||^4 = 0 \end{aligned}$$

אם הווקטורים תלויים לינארית, השוויון ברור. ■

טענה 1.1 נגדיר $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. במרחב פרה מכפלה פנימית זו חצי נורמה, ובמרחב מכפלה פנימית זו נורמה.

הוכחה: כל שיש להראות הוא אי שוויון המשולש. יהיו $x,y\in E$.

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + ||y||^2 \le ||x||^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| + ||y||^2 \le \\ &\le ||x||^2 + 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

שוויון מתקיים אם ורק אם מתקיים

$$||x||\,||y|| = \langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle$$

בשביל השוויון הראשון ראינו שהוא שקול לתלות לינארית. נכתוב $y=\lambda x$,$x\neq0$ (אם x הוא 0 אז הכל טריוויאלי). כעת נרצה

$$\begin{aligned}\left\langle x,\lambda x\right\rangle &= \mathrm{Re}\left\langle x,\lambda x\right\rangle\\ \overline{\lambda}\left\langle x,x\right\rangle &= \mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\left\langle x,x\right\rangle\right)\end{aligned}$$

צריך להתקיים

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\overline{\lambda}\left\langle x,x\right\rangle &= 0\\ \mathrm{Im}\overline{\lambda} &= 0\\ \lambda &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

וכן צריך להתקיים $\lambda\geq0$. ■

תכונה במרחב מכפלה פנימית E, עבור $x,y\in E$ עם $||x||=||y||=1$, $x\neq y$, אזי $||\frac{x+y}{2}||<1$.

טענה 1.2 אם X מרחב נורמי שאיזומטרי למרחב מכפלה פנימית, אזי לכל $x,y\in X$ עם $||x||=||y||=1$, $x\neq y$, מתקיים $||x+y||<2$.

דוגמא במרחב $C\left[-1,1\right]$, עם נורמת המקסימום, נגדיר

$$\begin{aligned}f &\equiv 1\\ g &= \begin{cases}1 & x=0\\ 0 & otherwise\end{cases}\end{aligned}$$

כעת יתקיים $||f||=||g||=1$, $||f+g||=2$.

הערה 1.3 (שוויון המקבילית) אם E מרחב מכפלה פנימית אזי לכל $x,y\in E$ מתקיים

$$||x+y||^{2}+||x-y||^{2}=2\left||x|\right|^{2}+2\left||y|\right|^{2}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}||x+y||^{2}+||x-y||^{2} &= ||x||^{2}+2\mathrm{Re}\left\langle x,y\right\rangle+||y||^{2}+||x||^{2}-2\mathrm{Re}\left\langle x,y\right\rangle+||y||^{2}=\\ &= 2\left||x|\right|^{2}+2\left||y|\right|^{2}\end{aligned}$$

■

נשים לב שניתן לכתוב גם

$$\begin{aligned}4\mathrm{Re}\left\langle x,y\right\rangle &= ||x+y||^{2}-||x-y||^{2}\\ 4\mathrm{Im}\left\langle x,y\right\rangle=4\mathrm{Re}\left\langle x,iy\right\rangle &= ||x+iy||^{2}-||x-iy||^{2}\end{aligned}$$

לכן נוכל להגדיר

$$\langle x,y\rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i\left(||x+iy||^2 - ||x-iy||^2\right)}{4}$$

וזו תהיה מכפלה פנימית אם ורק אם הנורמה מקיימת את שוויון המקבילית (תרגיל).
יהי $p \neq 2$. ניזכר כי הגדרנו את הנורמה על המרחב l_p של סדרות אינסופיות על ידי

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

נגדיר את e_k להיות הטור שבו כל האיברים הם 0, פרט לאיבר k, שהוא 1. נראה כי כאן לא מתקיים שוויון המקבילית. כמובן מתקיים

$$||e_k||_p = 1$$

כעת מתקיים

$$||e_1+e_2|| = 2^{\frac{1}{p}} = ||e_1-e_2||$$

לכן

$$||e_1+e_2||^2 + ||e_1-e_2||^2 = 2\cdot 2^{\frac{2}{p}} \neq 2+2$$

כמובן שהשתמשנו בהנחה $p \neq 2$.

תרגיל הוכיחו כי במרחב מכפלה פנימית לכל $x_1,\dots,x_n \in E$ מתקיים

$$||x_1||^2 + \cdots + ||x_n||^2 = \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_i\in\{1,-1\}}\left|\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right|\right|^2$$

תרגיל הוכיחו כי לכל $p \neq 2$ המרחבים $l_p, C_{(p)}$ אינם איזומורפיים למרחב מכפלה פנימית.

1.1 אורתוגונליות

הגדרה 1.4 במרחב מכפלה פנימית E, הווקטורים x,y <u>אורתוגונליים</u> (מאונכים), מסמנים $x \perp y$, אם מתקיים $\langle x,y\rangle = 0$. הווקטור x אורתוגונאלי למרחב L, $x \perp L$, אם לכל $y \in L$, $x \perp y$.

בבירור, אם x אורתוגונאלי לסדרת ווקטורים, אזי הוא אורתוגונאלי גם לכל צירוף לינארי שלהם, כלומר

$$x \perp \{y_i\}_{i=1}^n \Rightarrow x \perp \operatorname{span}\{y_i\}_{i=1}^n$$

משפט 1.5 (פיתגורס) במרחב מכפלה פנימית E, לכל $x, y \in E$ המקיימים $x \perp y$ מתקיים

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

הוכחה:

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + ||y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

■

מסקנה 1.6 אם $x_1, \ldots, x_n$ אורתוגונאליים זה לזה, $x_i \perp x_j$ לכל $i \neq j$, אזי

$$\left|\left|\sum_{i=1}^n x_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^n ||x_i||^2$$

הגדרה 1.7 סדרה $\{e_j\}$ תקרא <u>אורתונורמלית</u> אם לכל $i \neq j$ מתקיים $x_i \perp x_j$ וכן $||x_i|| = 1$ לכל i.

מסקנה 1.8 אם $\{e_j\}$ אורתונורמלית, אזי לכל $\{c_j\}$ סקלרים מתקיים

$$\left|\left|\sum_{i=1}^n c_i x_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^n |c_i|^2$$

טענה 1.9 יהי E מרחב מכפלה פנימית, $L \subseteq E$ תת מרחב, $x \in E$, ונניח כי עבור $y \in L$ מתקיים $x - y \perp L$. אזי

$$||x-y|| = \operatorname{dist}(x, L) = \inf_{z \in L} ||x - z||$$

הוכחה: בבירור $||x-y|| \leq \operatorname{dist}(x, L)$. נותר להוכיח את הכיוון השני. מספיק להוכיח שלכל $z \in L$ מתקיים $||x-z|| \geq ||x-y||$.

$$||x-z||^2 = ||x-y+y-z||^2$$

$y - z \in L$, ולכן $x - y \perp y - z$, כלומר

$$||x-z||^2 = ||x-y+y-z||^2 = ||x-y||^2 + ||y-z||^2 \geq ||x-y||^2$$

■

משפט 1.10 יהי E מרחב מכפלה פנימית, ותהי $\{e_j\}$ סדרה אורתונורמלית, $L = \operatorname{span}\{e_j\}$.
אזי לכל $x \in E$ מתקיים

$$x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \perp L$$

וכן

$$\operatorname{dist}(x, L)^2 = ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

הוכחה: נסמן

$$y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \in L$$

נבדוק כי $x - y$ אורתוגונאלי לכל e_i.

$$\langle x - y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0$$

מהטענה הקודמת מתקיים

$$\operatorname{dist}(x, L) = ||x - y||$$

וכמו כן $x - y \perp L$ ובפרט $x - y \perp y$, ולכן

$$||x||^2 = ||x - y||^2 + ||y||^2 = \operatorname{dist}(x, L)^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

וקיבלנו את הנדרש. ■

למעשה ראינו כאן את העתקה ההיטל האורתוגונלי על L:

$$x \mapsto y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

נקרא להעתקה זו P_L, ואז

$$x - P_L x \perp L$$

מסקנה 1.11 (אי שוויון בסל) יהי E מרחב מכפלה פנימית, ותהי $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ קבוצה אורתונורמלית. אזי לכל $x \in E$ מתקיים

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq ||x||^2$$

הוכחה: מהמשפט הקודם, לכל n, כאשר $L_n = \operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^{n}$, מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 = ||x||^2 - \operatorname{dist}(x, L_n)^2 \leq ||x||^2$$

■

משפט 1.12 יהי E מרחב מכפלה פנימית, ותהי $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ סדרה אורתונורמלית. יהי $x \in E$. הטענות הבאות שקולות:

1.

$$x \in \overline{\operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}}$$

2.

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

3.

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2$$

הוכחה: $1 \Rightarrow 2$: נגדיר

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \to x$$

נסמן $L_n = \operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$,

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$$

וכעת $x_n \in L_n \subseteq L$, כלומר $x \in \overline{L}$.

$2 \Rightarrow 3$: נשים לב כי

$$\mathrm{dist}\left(x, L_n\right) = \left|\left|x\right|\right|^2 - \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle x, e_j \right\rangle\right|^2 \to 0$$

וכמובן

$$\mathrm{dist}\left(x, L_n\right)^2 = \left|\left|x - P_n x\right|\right|^2 = \left|\left|x - \sum_{j=1}^{n} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j\right|\right|^2$$

לכן מתקיים $P_n x \to x$.
$3 \Rightarrow 1$: נשים לב שהנתון שקול לכך שמתקיים

$$\mathrm{dist}\left(x, L_n\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

אבל מתקיים

$$\mathrm{dist}\left(x, L_n\right)^2 = \left|\left|x\right|\right|^2 - \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle x, e_i \right\rangle\right|^2$$

ולכן מתקיים

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\left\langle x, e_i \right\rangle\right|^2 = \left|\left|x\right|\right|^2$$

■