<u>מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים</u>

ⓒ ארזים

6 בנובמבר 2016

1 מרחבים נורמיים

הגדרה 1.1 תהי $f:X\to\mathbb{C}$ כאשר X מרחב נורמי. נגיד שהפונקציה f <u>רציפה</u> בנקודה x אם לכל $x_n\to x$ מתקיים $f(x_n)\to f(x)$. נגדי שהפונקציה f רציפה אם היא רציפה בכל נקודה $x\in X$.

דוגמא הפונקציה $||\cdot||$ רציפה, שכן

$$|||x||-||y|||\le ||x-y||$$

לכן אם $x_n\to x$ אזי

$$0\le |||x_n||-||x|||\le ||x_n-x||\to 0$$

הגדרה 1.2 נגדיר רציפות באותה צורה גם עבור פונקציות $f:X\to Y$, כאשר X,Y מרחבים נורמיים.

סימון את אוסף ההעתקות הלינאריות ממרחב X למרחב Y נסמן $\mathrm{Lin}(X,Y)$.

הגדרה 1.3 $T\in\mathrm{Lin}(X,Y)$ נקראת חסומה אם קיים $C>0$ כך שלכל $x\in X$ מתקיים

$$||Tx||_Y\le C\,||x||_X$$

טענה 1.4 אם $T\in\mathrm{Lin}(x,y)$ חסומה, אזי היא רציפה.

הוכחה: אם $x_n\to x$ אזי מתקיים

$$0\le ||Tx_n-Tx||_Y=||T(x_n-x)||_Y\le C\,||x_n-x||_X\to 0$$

■

טענה 1.5 אם $T\in\mathrm{Lin}(x,y)$ רציפה, אזי T חסומה.

הוכחה: נגדיר במרחב X חצי נורמה חדשה:

$$\varphi(x) = ||Tx||_Y$$

כעת, T רציפה אם ורק אם $||\cdot||_X \prec \varphi$: נניח כי $x_n \to x$, אזי $Tx_n \to Tx$, ואז

$$0 \leq \varphi(x_n - x) = ||T(x_n - x)||_y = ||Tx_n - Tx||_y \to 0$$

הוכחנו שמכאן נובע כי קיים $c > 0$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים

$$\varphi(x) = ||Tx||_Y \leq c\,||x||_X$$

וזו ההגדרה של חסימות. ■

כעת נוכל לדבר על המרחב הלינארי של ההעתקות הלינאריות הרציפות מהמרחב X למרחב Y. נוכל להגדיר עליו נורמה:

$$||T|| = \inf\{c \mid \forall x \in X \quad ||Tx|| \leq c\,||x||\}$$

טענה 1.6

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{x \leq 1} ||Tx||$$

הוכחה: נסמן

$$A = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||}$$

A הוא חסם עליון של $\frac{||Tx||}{||x||}$, כלומר לכל $x \in X$ מתקיים

$$\begin{aligned} \frac{||Tx||}{||x||} &\leq A \\ ||Tx|| &\leq A\,||x|| \end{aligned}$$

כעת, אם $||Tx|| \leq C\,||x||$, אזי לכל $x \neq 0$ מתקיים

$$\frac{||Tx||}{||x||} \leq C$$

ולכן C גם חסם עליון - אבל A הוא, מההגדרה, החסם העליון המינימלי, ולכן $A \leq C$.

נוכיח את הביטוי השני:

$$\frac{||Tx||}{||x||}=\left|\left|T\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right|\leq\sup_{||x||\leq1}||Tx||$$

שכן $\left|\left|\frac{x}{||x||}\right|\right|=1$. כמו כן, עבור $||x||\leq1$, מתקיים

$$\begin{aligned}||Tx|| &\leq ||T||\,||x||\\ \sup_{||x||\leq1} &\leq ||T||\end{aligned}$$

■

הערה 1.7 ניתן לכתוב גם

$$||T||=\sup_{||x||=1}||Tx||$$

טענה 1.8 $||T||\to T$ נורמה.

הוכחה: האי שליליות ברורה, שכן זהו סופרימום של איברים אי שליליים.

$$||\lambda T||=\sup_{||x||\leq1}||\lambda Tx||=\sup_{||x||\leq1}|\lambda|\,||Tx||=|\lambda|\,||T||$$

כמו כן,

$$\begin{aligned}||T+S|| &= \sup_{||x||\leq1}||(T+S)\,x||=\sup_{||x||\leq1}||Tx+Sx||\leq\\ &\leq \sup_{||x||\leq1}||Tx||+||Sx||\leq\sup_{||x||\leq1}||Tx||+\sup_{||x||\leq1}||Sx||=\\ &= ||T||+||S||\end{aligned}$$

כעת, תהי $T\neq0$. קיים $0\neq x\in X$ עבור $Tx\neq0$, ולכן

$$||T||\geq\frac{||Tx||}{||x||}>0$$

■

סימון את המרחב הנורמי שהגדרנו עכשיו נסמן $\mathcal{L}\left(X,Y\right)$ - כל האופרטורים (הלינאריים) החסומים מהמרחב X למרחב Y.

הגדרה 1.9 $T\in\mathcal{L}\left(X,Y\right)$ נקראת איזומטרית אם T על Y ולכל $x\in X$ מתקיים

$$||Tx||=||x||$$

הגדרה 1.10 שני מרחבים X,Y ייקראו איזומטריים אם קיימת העתקה איזומטרית ביניהם.

הגדרה 1.11 שני מרחבים X,T ייקראו איזומורפיים אם קיימת $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ חד־חד־ערכית ועל, כך שגם $T^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$. ההעתקה T נקראת איזומורפיזם.

טענה 1.12 תהי $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ חד־חד־ערכית ועל. T איזומורפיזם אם ורק אם קיימים $0<c<C<\infty$ כך שלכל $x\in X$ מתקיים

$$c\,||x||\leq||Tx||\leq C\,||x||$$

הוכחה: קיומו של C שקול לכך שהנחנו כי T חסומה. כעת, יהי $y\in Y$. נתון כי T על, ולכן קיים $x\in X$ כך שמתקיים $Tx=y$, ואז נרצה להוכיח

$$c\,||x||=c\left|\left|T^{-1}y\right|\right|\leq||y||$$

זה שקול לכך שמתקיים

$$\left|\left|T^{-1}y\right|\right|\leq\frac{1}{c}\,||y||$$

וזה שקול לחסימות ההעתקה ההופכית ־ ולכן להיות T איזומורפיזם. ■

הערה 1.13 נשים לב שאיזומורפיזם, שנסמנו $X\sim Y$, הוא יחס שקילות.

משפט 1.14 יהיו X,Y שני מרחבים נורמיים סוף מימדיים. אזי $X\sim Y$ אם ורק אם $\dim X=\dim Y$.

הוכחה: אם המרחבים איזומורפיים, קיימת ביניהם העתקה לינארית חד־חד־ערכית ועל, ולכן בבירור מימדיהם שווים. כעת נניח כי $\dim X=\dim Y=n$. נניח שהמרחבים מוגדרים מעל $\mathbb{R}$ (מעל $\mathbb{C}$ ההוכחה זהה). בגלל שאיזומורפיזם הוא יחס שקילות, מספיק להראות כי כל מרחב נורמי X ממימד n איזומורפי למרחב $\mathbb{R}^n$. ניקח בסיס $e_1,\ldots,e_n$ של X, ואז נגדיר

$$\begin{aligned}T:\mathbb{R}^n &\to X\\ T(c) &= \sum_{i=1}^{n}c_ie_i\end{aligned}$$

T חד־חד־ערכית ועל משום שבחרנו בסיס. כעת, לכל $c\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\begin{aligned}||Tc|| &= \left|\left|\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\right|\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|c_i|\,||e_i||\leq\\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}||e_i||^2}=||c||\sqrt{\sum_{i=1}^{n}||e_i||^2}\end{aligned}$$

לכן קיבלנו כי T היא חסומה, כלומר רציפה. כעת נגדיר $f(c) = ||Tc||$. כהרכבת פונקציות רציפות, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא רציפה. בפרט, הצמצום של f על ספירת היחידה S^{n-1} גם כן רציף, אבל הספירה קומפקטית - ולכן f, כפונקציה רציפה, מקבלת עליה מקסימום ומינימום. כלומר, קיים $x_0 \in S^{n-1}$ כך שלכל $x \in S^{n-1}$ מתקיים

$$c_1 := ||Tx_0|| = f(x_0) \le f(x) = ||Tx||$$

$c_1 \neq 0$ שכן $x_0 \neq 0$, ולכן $c_1 > 0$. כעת, לכל $c \neq 0$ מתקיים

$$\frac{c}{||c||} \in S^{n-1}$$

ולכן

$$\begin{aligned} c_1 &\le \left|\left|T\frac{c}{||c||}\right|\right| = \frac{1}{||c||}||Tc|| \\ c_1||c|| &\le ||Tc|| \end{aligned}$$

ולכן מהטענה הקודמת הוכחנו כי T איזומורפיזם. ■

הערה 1.15 נוכל להכיל את המשפט הזה על מרחב מסויים פעמיים, עם נורמה שונה בכל פעם, ולקבל שקילות בין הנורמות. למעשה המשפט שקול למשפט מהשיעור שעבר, שלא סיימנו להוכיח, שכל שתי נורמות הן שקולות.

2 מרחבי מכפלה פנימית

הגדרה 2.1 מרחב לנארי E נקרא <u>מרחב מכפלה פנימית</u> אם קיימת העתקה $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to \mathbb{C}$ המקיימת:

1. לכל $x_1, x_2, y \in E$ ולכל $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1 \langle x_1, y\rangle + \lambda_2 \langle x_2, y\rangle$$

2. לכל $x, y \in E$ מתקיים

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$

3. לכל $x \in E$ מתקיים

$$\langle x, x\rangle \ge 0$$

וכן

$$x = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0$$

בלי החלק השני של התכונה השלישית ההעתקה נקראת פרה מכפלה פנימית, במקום מכפלה פנימית.

מסקנה 2.2 מתוך תכונות 1,2 של מכפלה פנימית נובע כי לכל $x, y_1, y_2 \in E$ ולכל $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, y_2 \rangle$$

דוגמאות

1. במרחב $\mathbb{C}$, נוכל להגדיר

$$\langle x, y \rangle = x\overline{y}$$

2. במרחב $\mathbb{C}^n$, נגדיר

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

3. במרחב $C[a, b]$, נגדיר

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} \, \mathrm{d}t$$

במרחב מכפלה פנימית, נוכל להגדיר

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

במרחב פרה מכפלה פנימית, זוהי חצי נורמה. במרחב מכפלה פנימית, זו נורמה. אנחנו הולכים להוכיח את זה, אבל בשביל זה נצטרך להוכיח קודם משפט.

משפט 2.3 (אי שוויון קושי שוורץ) יהי E מרחב מכפלה פנימית (או מרחב פרה מכפלה פנימית). אזי לכל $x, y \in E$ מתקיים

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \, ||y||$$

הוכחה: נגדיר פונקציית עזר עם משתנה ממשי יחיד:

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle x+ty, x+ty\rangle = \langle x, x+ty\rangle + t\langle y, x+ty\rangle = \\ &= \langle x,x\rangle + t\langle x,y\rangle + t\langle y,x\rangle + t^2\langle y,y\rangle = t^2\|y\|^2 + 2t\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|x\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

קיבלנו פולינום ריבועי אי־שלילי, ולכן חייב להתקיים

$$4\left(\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\right)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

לכן נקבל כי

$$|\mathrm{Re}\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

כעת נגדיר $y_1 = \langle x,y\rangle \cdot y$ ואז

$$\mathrm{Re}\langle x,y_1\rangle = \langle x, \langle x,y\rangle y\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|^2$$

כעת נקבל כי

$$\begin{aligned} |\langle x,y\rangle|^2 &= \mathrm{Re}\langle x,y_1\rangle \leq \|x\|\,\|y_1\| = \|x\|\,\|\langle x,y\rangle y\| = |\langle x,y\rangle|\,\|x\|\,\|y\| \\ |\langle x,y\rangle| &\leq \|x\|\,\|y\| \end{aligned}$$

■