מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

30 באוקטובר 2016

1 הקדמה וחזרה

הקורס עוסק במרחבים לינאריים, שאנחנו מכירים מאלגברה לינארית. השדות שמעליהם נעבוד הם $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ בלבד. ניזכר כי במרחב לינארי יש פעולת חיבור בין כל שני איברים, וכן כפל בסקלר כלשהו מן השדה, כאשר פעולות אלה מקיימות פילוג.
ניזכר גם כי אוסף ווקטורים הוא תלוי לינארית אם קיים צירוף לינארי לא טריוויטלי שלהם (כלומר צירוף בו לא כל המקדמים הם 0) ששווה לאפס. קבוצת ווקטורים נקראת בלתי תלוייה לינארית אם היא לא תלוייה לינארית.
תת קבוצה לא ריקה של מרחב לינארי היא תת מרחב לינארי אם היא סגורה לחיבור ולכפל בסקלר.
עבור תת קבוצה V של מרחב לינארי E מעל שדה $\mathbb{K}$, נגדיר את $\text{span}V$ להיות תת המרחב הלינארי המינימלי שמכיל את V. הגדרה שקולה:

$$\text{span}V = \bigcap_{V \subseteq L \subseteq E} L = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \mid n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{K}, x_1 \ldots, x_n \in V \right\}$$

כאשר בחיתוך, L חייב להיות תת מרחב.
אם לכל n קיימים $x_1, \ldots, x_n$ בלתי תלויים לינארית, אזי $\dim E = \infty$. אחרת, מתקיים $\dim V < \infty$, ומתקיים

$$\dim V = \max \{ n \mid \exists x_1, \ldots, x_n \text{ s.t. they are linearly independent} \}$$

בנוסף, אם $\dim V < \infty$, אזי גם

$$\dim V = \min \{ |V| \mid \text{span}V = E \}$$

לבסוף, עבור $F \subseteq E$ תת מרחב לינארי, נוכל להגדיר יחס שקילות על E:

$$x \sim y \iff x - y \in F$$

זה בבירור יחס שקילות. בעזרתו נוכל להגדיר את מרחב המנה:

$$E/F = \{ [x] \mid x \in E \}$$

ועליו את הפעולות:

$$\begin{aligned}\lambda\cdot[x] &= [\lambda x]\\ [x]+[y] &= [x+y]\end{aligned}$$

במצב זה יש העתקה לינארית קנונית

$$\begin{aligned}\pi : E &\to E/F\\ \pi(x) &= [x]\end{aligned}$$

העתקה זו היא על מההגדרה. כמו כן,

$$\ker\pi = \{x\in E \mid [x]=0\} = \{x \mid x\sim 0\} = F$$

כעת, עבור כל העתקה לינארית $A : E\to L$ על, קיימת ההטלה π על המרחב $E/\ker A$, וכן קיימת העתקה לינארית $\hat{A} : E/\ker A\to L$ שהיא חד־חד־ערכית ועל, כך שמתקיים $\hat{A}\circ\pi = A$.

הגדרה 1.1 יהי E מרחב לינארי. פונקציה $\varphi : E\to\mathbb{R}$ נקראת <u>נורמה</u> אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1. לכל $x,y\in E$ מתקיים $\varphi(x+y)\leq\varphi(x)+\varphi(y)$ (אי שוויון המשולש)
2. לכל $x\in E$ ולכל סקלר λ מתקיים $\varphi(\lambda x)=|\lambda|\varphi(x)$ (המוגניות חיובית)
3. לכל $x\in E$ מתקיים $\varphi(x)\geq 0$, וכן $\varphi(x)=0 \iff x=0$

הגדרה 1.2 פונקציה φ נקראת חצי נורמה אם היא מקיימת את תכונות 1,2 וכן $\varphi(x)\geq 0$ לכל $x\in E$.

לרוב נסמן נורמה על ידי $||x||$. מרחב עם נורמה ייקרא <u>מרחב נורמי</u>.

דוגמאות

1. המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^n$, עם הנורמה הסטנדרטית:

$$\varphi(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i^2|}$$

נורמה אלטרנטיבית:

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

דוגמה לחצי נורמה: במרחב $\mathbb{R}^2$, נגדיר

$$\varphi\left(x_1,x_2\right)=\left|x_1\right|$$

כמובן, לכל x, $\varphi\left(0,x\right)=0$, ולכן זו חצי נורמה.

2. דוגמה אינסוף־מימדית: $C\left[a,b\right]$ ־ הפונקציות הרציפות על הקטע $\left[a,b\right]$. הנורמה:

$$\left|\left|f\right|\right|=\max_{t\in\left[a,b\right]}\left|f\left(t\right)\right|$$

כעת מתקיים

$$\left|\left|f+g\right|\right|=\left|f\left(t_0\right)+g\left(t_0\right)\right|\leq\left|f\left(t_0\right)\right|+\left|g\left(t_0\right)\right|\leq\left|\left|f\right|\right|+\left|\left|g\right|\right|$$

נורמה אחרת:

$$\varphi\left(f\right)=\int_a^b\left|f\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t$$

כעת,

$$\varphi\left(f+g\right)=\int_a^b\left|f\left(t\right)+g\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t\leq\int_a^b\left|f\left(t\right)\right|+\left|g\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t=\varphi\left(f\right)+\varphi\left(g\right)$$

כאשר נשתמש בנורמה זו, נסמן את המרחב בתור $C_{(1)}\left[a,b\right]$.

3. נוכל להרחיב את ההגדרה הקודמת למרחב $R\left[a,b\right]$ ־ פונקציות אינטגרביליות רימן בקטע $\left[a,b\right]$. במקרה זה הנורמה היא רק חצי נורמה.

טענה 1.3 אם φ חצי נורמה, אזי לכל $x,y\in E$ מתקיים

$$\left|\varphi\left(x\right)-\varphi\left(y\right)\right|\leq\varphi\left(x-y\right)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\varphi\left(x\right)&=\varphi\left(y+\left(x-y\right)\right)\leq\varphi\left(y\right)+\varphi\left(x-y\right)\\ \varphi\left(x\right)-\varphi\left(y\right)&\leq\varphi\left(x-y\right)\\ \varphi\left(y\right)-\varphi\left(x\right)&\leq\varphi\left(y-x\right)=\varphi\left(-1\left(x-y\right)\right)=\left|-1\right|\varphi\left(x-y\right)=\varphi\left(x-y\right)\end{aligned}$$

■

הגדרה 1.4 יהי E מרחב לינארי עם חצי נורמה φ. הגרעין של φ הוא:

$$\ker\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\}$$

טענה 1.5 $\ker\varphi$ הוא תת מרחב לינארי.

הוכחה: אם $x \in \ker\varphi$ אזי

$$\varphi(\lambda x) = |\lambda|\,\varphi(x) = 0$$

ולכן $\lambda x \in \ker\varphi$. כמו כן, אם $x, y \in \ker\varphi$, אזי

$$0 \leq \varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) = 0 + 0 = 0$$

ולכן $\varphi(x+y) = 0$, כלומר $x + y \in \ker\varphi$. כמובן שהגרעין לא ריק, כי $\varphi(0) = 0$.■

טענה 1.6 נסמן $F = \ker\varphi$. יהי $x \in E$, ויהי $y \in x + F = [x]_F$. אזי $\varphi(y) = \varphi(x)$.

הוכחה:

$$0 \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi(x-y) = 0$$

■

מסקנה 1.7 נוכל להגדיר נורמה על E/F על ידי

$$||[x]|| = \varphi(x)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} ||[x]+[y]|| &= ||[x+y]|| = \varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) = \\ &= ||[x]|| + ||[y]|| \end{aligned}$$

$$||\lambda[x]|| = ||[\lambda x]|| = \varphi(\lambda x) = |\lambda|\,\varphi(x) = |\lambda|\,||[x]||$$

$$||[x]|| = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow [x] = 0$$

■

הגדרה 1.8 נניח כי E מרחב נורמי עם נורמה $||\cdot||$. נאמר שסדרה x_n <u>מתכנסת</u> לערך x, ונסמן $x_n \to x$, אם מתקיים $||x_n - x|| \to 0$.

נרצה למשל לדעת האם גבול במרחב $C\left[a,b\right]$ זהה לגבול במרחב $C_{(1)}\left[a,b\right]$. התשובה היא כמובן שלא. נגדיר

$$f_n\left(t\right)=\begin{cases}1-n\left|t\right| & \left|t\right|\leq\frac{1}{k}\\ 0 & \left|t\right|>\frac{1}{k}\end{cases}$$

במרחב $C\left[a,b\right]$, הנורמה של כל הפונקציות היא 1, שכן לכל n, $f_n\left(0\right)=1$, וכמובן שאי אפשר להגיע גבוה יותר. לכן הגבול הוא 1. במרחב $C_{(1)}\left[a,b\right]$, האינטגרלים הולכים לאפס, לכן הגבול הוא 0.

הגדרה 1.9 יהי E מרחב לינארי עם שתי נורמות φ,ψ. נאמר שהנורמה ψ <u>חזקה</u> מהנורמה φ אם

$$x_n\xrightarrow{\psi}x\Rightarrow x_n\xrightarrow{\varphi}x$$

ונסמן $\psi\prec\varphi$.

טענה 1.10 $\psi\prec\varphi$ אם ורק אם קיים $0<C<\infty$ כך שלכל $x\in E$ מתקיים $\varphi\left(x\right)\leq C\psi\left(x\right)$.

הוכחה: נניח כי $\varphi\left(x\right)\leq C\psi\left(x\right)$ לכל $x\in E$. תהי סדרה x_n המקיימת $x_n\xrightarrow{\psi}a$. כעת, מתקיים

$$\varphi\left(x_n-a\right)\leq C\psi\left(x_n-a\right)\to0$$

כלומר $x_n\xrightarrow{\varphi}a$.
בכיוון השני, נניח בשלילה שאין קבוע C כזה. כלומר, לכל n קיים איבר z_n כך שמתקיים $\varphi\left(z_n\right)>n\psi\left(z_n\right)$. נגדיר

$$x_n=\frac{z_n}{\varphi\left(z_n\right)}$$

כעת,

$$\varphi\left(x_n\right)=\varphi\left(\frac{1}{\varphi\left(z_n\right)}\cdot z_n\right)=\frac{1}{\varphi\left(z_n\right)}\cdot\varphi\left(z_n\right)=1$$

כמו כן,

$$\psi\left(x_n\right)=\frac{1}{\varphi\left(z_n\right)}\cdot\psi\left(z_n\right)<\frac{1}{n}\to0$$

בסך הכל נקבל כי $x_n\xrightarrow{\psi}0$ וכן $x_n\overset{\varphi}{\not\to}0$, בסתירה לכך שמתקיים $\psi\prec\varphi$. ■

הגדרה 1.11 אם הנורמות φ,ψ מקיימות $\varphi \prec \psi, \psi \prec \varphi$, נאמר שהנורמות שקולות, ונסמן $\psi \asymp \varphi$. נשים לב כי זהו יחס שקילות.

מסקנה 1.12 הנורמות φ,ψ שקולות אם ורק אם קיימים קבועים $0 < c < C < \infty$ כך שלכל $x \in E$ מתקיים

$$c\psi\left(x\right) \leq \varphi\left(x\right) \leq C\psi\left(x\right)$$

ראינו כבר כי $||\cdot||_{C_{(1)}},||\cdot||_C$ אינן שקולות. עם זאת,

$$\int\limits_a^b \left|f\left(t\right)\right| \, \mathrm{d}t \leq \left(b-a\right) \max_{t\in[a,b]} \left|f\left(t\right)\right|$$

ולכן

$$||f||_{C_{(1)}} \leq \left(b-a\right)||f||_C$$

כלומר

$$||\cdot||_{C_{(1)}} \prec ||\cdot||_C$$

למה 1.13 (אי שוויון יאנג) יהי $1 < p < \infty$, ונגדיר $q = \frac{p}{p-1}$ (נשים לב כי מתקיים $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$). אזי לכל $a,b>0$ מתקיים

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

הוכחה: נשתמש בקמירות פונקציית הלוגריתם.

$$\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln a + \ln b = \ln ab$$

הפונקציה $\ln$היא מונוטונית, ולכן גם ההופכית לה מונוטונית - ולכן סיימנו. ■

לכל $1 < p < \infty$, $f \in C\left[a,b\right]$. נגדיר

$$\varphi_p\left(f\right) = \left(\int\limits_a^b \left|f\left(t\right)\right|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

נרצה להוכיח כי זו נורמה על $C\left[a,b\right]$. ראשית נוכיח אי שוויון חשוב:

טענה 1.14 (אי שוויון הלדר) אם $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, אזי לכל $f,g\in C\left[a,b\right]$ מתקיים

$$\left|\int\limits_a^b f\left(t\right)g\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right|\le\varphi_p\left(f\right)\varphi_q\left(g\right)$$

הוכחה: ראשית נניח כי $\varphi_p\left(f\right)\le1,\varphi_q\left(g\right)\le1$. נוכיח כי

$$\left|\int\limits_a^b f\left(t\right)g\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right|\le1$$

מאי שוויון יאנג, לכל t מתקיים

$$\left|f\left(t\right)g\left(t\right)\right|\le\frac{\left|f\left(t\right)\right|^p}{p}+\frac{\left|g\left(t\right)\right|^q}{q}$$

אי שוויון נשמר באינטגרציה, ולכן

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_a^b f\left(t\right)g\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right| &\le \int\limits_a^b\left|f\left(t\right)g\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{p}\int\limits_a^b\left|f\left(t\right)\right|^p\,\mathrm{d}t+\frac{1}{q}\int\limits_a^b\left|g\left(t\right)\right|^q\,\mathrm{d}t=\\ &= \frac{1}{p}\varphi_p\left(f\right)^p+\frac{1}{q}\varphi_q\left(g\right)^q\le\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\end{aligned}$$

נשים לב שבלי הגבלת הכלליות, נוכל להניח כי $\varphi_p\left(f\right),\varphi_q\left(g\right)\neq0$. כעת, נגדיר פונקציות חדשות:

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{1}{\varphi_p\left(f\right)}f\\ g_1 &= \frac{1}{\varphi_q\left(g\right)}g\end{aligned}$$

נשים לב כי φ_p היא הומוגנית חיובית, ולכן

$$\begin{aligned}\varphi_p\left(f_1\right) &= \frac{1}{\varphi_p\left(f\right)}\varphi_p\left(f\right)=1\\ \varphi_q\left(g_1\right) &= \frac{1}{\varphi_q\left(g\right)}\varphi_q\left(g\right)=1\end{aligned}$$

כעת, מהחלק הקודם של ההוכחה, מתקיים

$$\left|\int\limits_a^b f_1\left(t\right)g_1\left(t\right)\right|\le1$$

נמשיך מכאן ונקבל:

$$1 \geq \left| \int_a^b \frac{1}{\varphi_p(f)} f(t) \cdot \frac{1}{\varphi_q(g)} g(t) \ \mathrm{d}t \right|$$

ולכן

$$\varphi_p(f)\,\varphi_q(g) = \left| \int_a^b f(t)\,g(t) \ \mathrm{d}t \right|$$

$\blacksquare$

תרגיל (הוכחה ממש דומה):

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

מסקנה 1.15 (אי שוויון מינקובסקי) יהי $1 < p < \infty$, ויהיו $f, g \in C[a,b]$. אזי מתקיים

$$\varphi_p(f+g) \leq \varphi_p(f) + \varphi_p(g)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \varphi_p(f+g)^p &= \int_a^b |f(t)+g(t)|^p \ \mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1} \left(|f(t)| + |g(t)|\right) \mathrm{d}t = \\ &= \int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1} |f(t)| \ \mathrm{d}t + \int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1} |g(t)| \ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

מאי שוויון הלדר,

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1} |f(t)| \ \mathrm{d}t \leq \varphi_p(f) \cdot \varphi_q\left((f+g)^{p-1}\right)$$

מההגדרה,

$$\begin{aligned} \varphi_q\left((f+g)^{p-1}\right) &= \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}} \ \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \varphi_p(f+g)^{\frac{p}{q}} = \varphi_p(f+g)^{p-1} \end{aligned}$$

כלומר,

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|\,\mathrm{d}t &\leq \varphi_p(f)\cdot\varphi_p(f+g)^{p-1}\\ \int_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)|\,\mathrm{d}t &\leq \varphi_p(g)\cdot\varphi_p(f+g)^{p-1}\end{aligned}$$

בסך הכל נקבל כי

$$\begin{aligned}\varphi_p(f+g)^p &\leq \varphi_p(f+g)^{p-1}(\varphi_p(f)+\varphi_p(g))\\ \varphi_p(f+g) &\leq \varphi_p(f)+\varphi_p(g)\end{aligned}$$

■

בסך הכל, קיבלנו כי $\varphi_p(f)$ היא נורמה על $C[a,b]$. נורמה זו נסמן בתור $||\cdot||_p$. את המרחב הנורמי המתקבל נסמן בתור $C_{(p)}[a,b]$.

בצורה דומה, ניתן להחליף את כל האינטגרלים בסכומים של סדרות, ולקבל נורמה על סדרות:

$$||(a_k)||_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

זו נורמה על המרחב

$$L_p=\left\{(a_k)_{k=1}^{\infty}\mid\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p<\infty\right\}$$

את הנורמה על מרחב זה נסמן בתור $||\cdot||_{L_p}$

תרגיל (להשתמש באי שוויון הלדר):

$$\begin{aligned}p_1 &> p_2\Rightarrow||\cdot||_{C_{p_1}}\succ||\cdot||_{C_{p_2}}\\ p_1 &> p_2\Rightarrow||\cdot||_{l_{p_1}}\prec||\cdot||_{l_{p_2}}\end{aligned}$$

משפט 1.16 יהי E מרחב לינארי סוף־מימדי, כלומר $\dim E<\infty$. יהיו φ,ψ נורמות על E. אזי מתקיים $\varphi\asymp\psi$.

הוכחה: בגלל ששקילות זו היא יחס שקילות, נוכיח זאת על ידי הוכחה כי הן שתיהן שקולות לנורמה מסויימת.

יהי $e_1,\dots,e_n$ בסיס של E. לכל $x\in E$ קיים פירוק יחיד
$$x=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i$$
נגדיר נורמה:
$$|x|=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|c_i^2\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$
אם נוכיח כי $|\cdot|\asymp\varphi$, בגלל שגם φ וגם ψ שרירותיות, נקבל מטרנזיטיביות את הנדרש.
מתקיים
$$\varphi(x)\le\sum_{i=1}^{n}\varphi(c_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}|c_i|\,\varphi(e_i)$$
כעת נחיל את אי שוויון הלדר עבור $p=2$ (ולכן גם $q=2$):
$$\varphi(x)\le\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(e_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
לכן, עבור
$$C=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\varphi(e_i)^2}$$
נקבל כי
$$\varphi(x)\le C\,|x|$$
כלומר
$$\varphi\prec|\cdot|$$
כעת, נגדיר (מניחים שעובדים בממשיים, במרוכבים הכל אותו דבר)
$$\begin{aligned}T:\mathbb{R}^n&\to E\\ T(c_1,\dots,c_n)&=\sum_{i=1}^{n}c_ke_k\end{aligned}$$
נרצה לטעון כי $\varphi\circ T$ היא פונקציה רציפה (ואפילו ליפשיץ) על $\mathbb{R}^n$. נסמן $f=\varphi\circ T$.
מתקיים
$$f(c_1-c_2)=\varphi(T(c_1-c_2))\le C\,|T(c_1-c_2)|=C\,||c_1-c_2||_{\mathbb{R}^n}$$
כפי שרצינו. ■