אלגברה ב' 1 - הרצאה 4 - 5.9.12

משפט האיזומורפיזם השלישי:

I. יהיו $N \lhd G$ ונסמן $\bar{G} = G/N$. אם $N \le H \le G$, אזי $N \lhd H$ וכמו כן $\bar{H} \le \bar{G}$.

II. ההעתקה $H \to \bar{H}$ היא העתקה חח"ע מהמשפחה $\{H \mid N \le H \le G\}$ על משפחת כל החבורות החלקיות של $\bar{G}$.

III. יתר על כן, העתקה זו שומרת (מקיימת):

- הכלה: $A_1 \le A_2 \Leftrightarrow \bar{A}_1 \le \bar{A}_2$
- חיתוכים: $\cap \bar{A}_i = \overline{\cap A_i}$
- נורמליות: $A_1 \lhd A_2 \Leftrightarrow \bar{A}_1 \lhd \bar{A}_2$
- מנות: אם $A_1 \lhd A_2$, אזי $\bar{A}_1/\bar{A}_2 \cong A_2/A_1$, כלומר $A_2/A_1 \cong {}^{A_2/N}\!\big/_{A_1/N}$.

<u>הוכחה</u>: אוכיח את החלק העיקרי של המשפט, הלא הוא הטענה על שמירת המנות. שאר החלקים נובעים באופן טכני מהגדרת חבורת המנה.

נגדיר: $\varphi : A_2 \to {}^{A_2/N}\!\big/_{A_1/N}$ ע"י: $\varphi(a_2) = a_2N \cdot (A_1/N)$.

נראה ש- φ הומומורפיזם ונמצא את התמונה והגרעין שלה:

$$\varphi(a_2a_2') = (a_2a_2'N)(A_1/N) = (a_2N \cdot a_2'N)(A_1/N) = (a_2N \cdot A_1/N) \cdot (a_2'N \cdot A_1/N) = \varphi(a_2)\varphi(a_2')$$

$$\operatorname{Im}\varphi = {}^{A_2/N}\!\big/_{A_1/N}$$

$$\begin{aligned} a_2 \in \ker\varphi &\Leftrightarrow \varphi(a_2) = a_2N(A_1/N) = A_1/N \\ &\Leftrightarrow a_2N \in A_1/N = \{a_1N \mid a_1 \in A_1\} \\ &\Leftrightarrow \exists a_1 \in A_1 : a_2N = a_1N \Leftrightarrow \exists a_1 \in A_1 : a_1a_2^{-1} \in N \le A_1 \\ &\Leftrightarrow a_2 \in A_1 \Leftrightarrow A_1 = \ker\varphi \end{aligned}$$

ולכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, מתקיים $A_2/A_1 \cong {}^{A_2/N}\!\big/_{A_1/N}$. ▨

<u>תרגיל</u>: יהיו $N \lhd G,\ H_1 \lhd H \le G$, אז $H_1N \lhd HN$.

<u>הוכחה</u>: מתקיים $N \le H_1N \le HN \le G$. לפי משפט האיזומורפיזם השלישי, די להוכיח

$$H_1N/N \lhd HN/N$$

איבר ב- HN/N הוא מהצורה $hnN = hN$, כאשר $h \in H,\ n \in N$, ובאותו אופן איבר ב- H_1N/N הוא מהצורה h_1N, כאשר $h_1 \in N$. לכן: $(hN)^{-1}(h_1N)(hN) = h^{-1}h_1hN \in H_1N/N$. ▨

<u>הלמה של צצנהאוס</u> ($Zassenhaus$) (למת הפרפר): יהיו $A_1 \lhd A \le G$, $B_1 \lhd B \le G$, אזי:

I. $A_1(A\cap B_1), A_1(A\cap B) \le G$.

II. $A_1(A\cap B_1) \lhd A_1(A\cap B)$, ובאופן סימטרי $B_1(A_1\cap B) \lhd B_1(A\cap B)$.

III. $B_1(A\cap B)/B_1(A_1\cap B) \cong A_1(A\cap B)/A_1(A\cap B_1)$.

<u>הוכחה</u>:

I. $A_1 \lhd A$ $A\cap B_1 \le A\cap B \le A,$, לכן (טענה מהרצאה 3 - $H \le G$, $N \lhd G$, אזי $HN \le G$) מתקיים $A_1(A\cap B_1), A_1(A\cap B) \le G$.

II. $B_1 \lhd B \Leftarrow B_1\cap(A\cap B) \lhd A\cap B$ (שוב, טענה מההרצאה הקודמת, $N_1, N_2 \lhd G \Leftarrow$ $N_1\cap N_2 \lhd G$). כלומר, $B_1\cap A \lhd A\cap B$, ונקבל בעזרת התרגיל האחרון $A_1(A\cap B_1) \lhd A_1(A\cap B)$.

III. $A_1\cap B \le A\cap B$, ולכן $B_1(A_1\cap B)(A\cap B) = B_1(A\cap B)$.

נראה $[B_1(A_1\cap B)]\cap(A\cap B) = (A\cap B_1)(A_1\cap B)$.

$\supseteq$: אם $x\in(A\cap B_1)(A_1\cap B)$, אז $x\in B_1(A_1\cap B)$, $x\in A\cap B$.

$\subseteq$: יהיו $c\in A_1\cap B$, $b\in B_1$. $bc\in A\cap B$ בבירור. לכן, $bc, c\in A$, ומסגירות לפעולה ולהפכי של A גם $b\in A$. קיבלנו $b\in A\cap B_1$.

לפי משפט האיזומורפיזם השני מתקיים:

$$[B_1(A_1\cap B)](A\cap B)/B_1(A_1\cap B) \cong A\cap B/A\cap B\cap[B_1(A_1\cap B)]$$

נציב את השוויונות שקיבלנו:

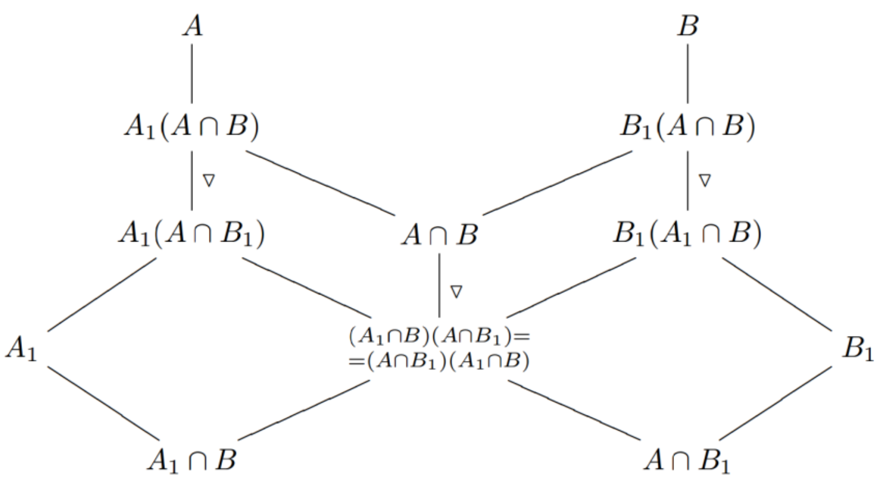
$$B_1(A\cap B)/B_1(A\cap B) \cong A\cap B/(A\cap B_1)(A_1\cap B)$$

משיקולי סימטריה (נחליף את A ו- B בהוכחה) נקבל:

$$A_1(B\cap A)/A_1(B\cap A) \cong B\cap A/(B\cap A_1)(B_1\cap A)$$

ומטרנזיטיביות יחס האיזומורפיה: $B_1(A\cap B)/B_1(A_1\cap B) \cong A_1(A\cap B)/A_1(A\cap B_1)$. ▨

להלן סכמה (בצורת פרפר! אם אתה לא מצליח לראות את הפרפר סימן שעשית נכון שבחרת ללמוד מתמטיקה ולא אומנות) הממחישה את היחסים בין החבורות השונות בהוכחה (לקוחה מתוך הרשימות של פרופסור דן הרן):



תרגיל: תהא G חבורה, נסמן $A=G\times G$ (מכפלה קרטזית). נסמן: $G_1=G\times\{1\},\ G_2=G\times\{2\}$.

I. הוכח: $G_1\cong G_2\cong G$.

הוכחה: נגדיר העתקה $\varphi:G\to G_1$ על ידי $\varphi(g)=(g,1)$. קל לבדוק שזהו איזומורפיזם. באופן דומה נוכיח עבור G_2.

II. תהא $\Delta=\{(g,g)\mid g\in G\}$ (תת-חבורת האלכסון). הוכח: $\Delta\cong G$.

הוכחה: נגדיר העתקה $\varphi:G\to\Delta$ על ידי $\varphi(g)=(g,g)$.

$$\varphi(gh)=(gh,gh)=(g,g)(h,h)=\varphi(g)\varphi(h)$$

ולכן φ הומומורפיזם. ברור ש-φ על. אם $g\in\ker\varphi$, אזי $(g,g)=(1,1)\Leftarrow g=1$, ולכן $\ker\varphi=\{1\}$, כלומר φ איזומורפיזם.

III. האם $\Delta,G_2,G_1\lhd G\times G$?

נבדוק האם $G_1\lhd G\times G$. ניקח $(g,1)\in G_1$, ויהי $(g_1,g_2)\in G\times G$.

$$(g_1,g_2)(g,1)(g_1,g_2)^{-1}=(g_1\cdot g,g_2)(g_1^{-1},g_2^{-1})=(g_1\cdot g\cdot g_1^{-1},1)\in G_1$$

כנ"ל לגבי G_2.

טענה: Δ נורמלית ב-G $\Leftrightarrow$ G אבלית.

הוכחה: $\Rightarrow$: נניח G אבלית, לכן $G\times G$ אבלית, ולכן כל תת חבורה שלה נורמלית, ובפרט Δ.

$\Rightarrow$: נניח $\Delta\lhd G\times G$. יהיו $g_1,g_2\in G$. מתקיים:

$$(g_1,g_2)(g_1,g_1)(g_1,g_2)^{-1}=(g_1\cdot g_1\cdot g_1^{-1},g_2\cdot g_1\cdot g_2^{-1})=(g_1,g_2\cdot g_1\cdot g_2^{-1})\in\Delta$$
$$\Rightarrow g_1=g_2\cdot g_1\cdot g_2^{-1}\Rightarrow g_1\cdot g_2=g_2\cdot g_1$$

לכן $G\times G$ אבלית.

הגדרה: אם G חבורה, $g,h\in G$ אז האיבר $[g,h]:=ghg^{-1}h^{-1}$ נקרא הקומוטטור של g,h.

תרגיל: g,h מתחלפים $\Leftrightarrow$ $[g,h]=1$.

הוכחה: g,h מתחלפים $\Leftrightarrow$ $gh=hg\Leftrightarrow [g,h]=ghg^{-1}h^{-1}=1$.

הגדרה: אם G חבורה, אזי תת חבורת הקומוטטור של G, שנסמנה G', היא התת חבורה הנוצרת על ידי כל הקומוטטורים.

טענה: $G'\lhd G$.

הוכחה: אבחנה I: $[g,h]^{-1}=hgh^{-1}g^{-1}=[h,g]$, ולכן G' היא אוסף כל המכפלות של כל הקומוטטורים.

אבחנה II: $a[g,h]a^{-1}=aghg^{-1}h^{-1}a^{-1}=(aga^{-1})(aha^{-1})=[aga^{-1},aha^{-1}]$.

ניקח איבר כללי של G', $[g_1,h_1]\cdot[g_2,h_2]\cdot\ldots\cdot[g_k,h_k]$, וניקח $a\in G$. אזי:

$$a[g_1,h_1]\cdot[g_2,h_2]\cdot\ldots\cdot[g_k,h_k]a^{-1}=a[g_1,h_1]a^{-1}\cdot a[g_2,h_2]a^{-1}\cdot\ldots\cdot a[g_k,h_k]a^{-1}$$
$$=[ag_1a^{-1},ah_1a^{-1}]\cdot[ag_2a^{-1},ah_2a^{-1}]\cdot\ldots\cdot[ag_ka^{-1},ah_ka^{-1}]\in G'$$

כי זו מכפלה של קומוטטורים. ▨

טענה: G/N אבלית אס"ם $G'\le N$, עבור $N\lhd G$ (ובפרט, G/G' תמיד אבלית).

הערה: G אבלית $\Leftrightarrow$ $G'=\{e\}$.

הוכחה: $\Rightarrow$: נניח $G'\le N$. ניקח $g_1N,g_2N\in G/N$.

$$[g_1,g_2]\in G'\le N\Rightarrow[g_1,g_2]N=N\Rightarrow g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}N=N$$
$$\Rightarrow(g_1N)(g_2N)(g_1^{-1}N)(g_2^{-1}N)=N$$
$$\Rightarrow(g_1N)(g_2N)=(g_2N)(g_1N)$$

$\Leftarrow$: נניח ש-$[g,h]$ קומוטטור.

$$gNhN=hNgN\Rightarrow ghg^{-1}h^{-1}\in N\Rightarrow[g,h]\in N$$

ומסגירות של G' לפעולה נקבל $G'\le N$. ▨

תרגיל: נניח $M,N\lhd G$, $M\cap N=\{e\}$. צ"ל: עבור $m\in M,n\in N$ מתקיים $mn=nm$.

פתרון: $M\ni m\underbrace{(nm^{-1}n^{-1})}_{\in M\lhd G}=[m,n]=\underbrace{(mnm^{-1})}_{\in N\lhd G}n^{-1}\in N$ (סימני השייכות נובעים מסגירות לפעולה ונורמליות). כלומר, מתקיים $[m,n]\in M\cap N$, לכן $[m,n]=e$, כלומר $mn=nm$.

טענה: נניח ש-$H\le G$, G סופית, H היא היחידה מסדרה בתוך G, אזי $H\lhd G$.

הוכחה: ניקח $g\in G$, ונתבונן בחבורה gHg^{-1}. מתקיים $gHg^{-1}\le G$, ומשום שפעולת ההצמדה היא העתקה חח"ע ועל, מתקיים $|H|=|gHg^{-1}|$. מיחידות הסדר של H מתקיים $H=gHg^{-1}$, כלומר $Hg=gH\Leftarrow$ H נורמלית ב-G. ▨

הגדרה: אם G חבורה, נסמן ב-$Z(G)$ את המֶרְכָּז של G: $Z(G)=\{g\in G\mid\forall h\in G:hg=gh\}$

טענה: $Z(G)\lhd G$.

הוכחה: יהיו $g\in Z(G),h\in G$. מתקיים $hgh^{-1}=ghh^{-1}=g\in Z(G)$, לכן $Z(G)\lhd G$. ▨

הערה: ישנן מקומות בהם מסמנים את המֶרְכָּז ב-$C(G)$.

תרגיל: $Z(G)=G\Leftrightarrow G$ אבלית $\Leftrightarrow G'=\{e\}$.

הגדרה: תהא G חבורה. הנורמליזטור (המשמר) של g ב-G מוגדר:

$$N_G(g)=\{h\in G\mid hgh^{-1}=g\}$$

טענה: $N_G(g) \le G$.

הוכחה: קל לראות ש- $e \in N_G(g)$. יהיו $a,b \in N_G(g)$.

סגירות: $abg(ab)^{-1} = abgb^{-1}a^{-1} = aga^{-1} = g \Leftarrow ab \in N_G(g)$.

הפכי: $a^{-1}g(a^{-1})^{-1} = a^{-1}ga = a^{-1}(aga^{-1})a = g \Leftarrow a^{-1} \in N_G(g)$. ▨

תרגיל: $a \in Z(G) \Leftrightarrow N_G(a) = G$.

הוכחה: $a \in Z(G) \Leftrightarrow \forall h \in G: ha = ah \Leftrightarrow \forall h \in G: hah^{-1} = a \Leftrightarrow N_G(a) = G$.

הגדרה: אם G חבורה, נסמן ב- $Aut(G)$ את אוסף כל האוטומורפיזמים של G. זוהי חבורה ביחס להרכבה.

דוגמה: יהי $a \in G$. ההעתקה $\varphi_a : g \mapsto aga^{-1}$ הוא אוטומורפיזם הנקרא אוטומורפיזם פנימי.
קל לראות ש- φ_a חד-חד ערכי ועל. נראה שהוא אכן הומומורפיזם:

$$\varphi_a(gh) = agha^{-1} = aga^{-1}aha^{-1} = \varphi_a(g)\varphi_a(h)$$

תרגיל: ההעתקה $\xi : G \to Aut(G)$ המעתיקה את a ל- φ_a חד-חד ערכית ועל.

הוכחה: $\xi(ab) = \varphi_{ab},\ \xi(a) = \varphi_a,\ \xi(b) = \varphi_b$. מתקיים:

$$\xi(ab)(g) = \varphi_{ab}(g) = abgb^{-1}a^{-1} = \varphi_a(bgb^{-1}) = \xi(a)(\varphi_b(g)) = \xi(a)(\xi(b)(g)) = (\xi(a) \circ \xi(b))(g)$$

הגדרה: להצמיד את g ב- a משמעו לחשב את $g^a := aga^{-1}$.

הגדרה: תהא G חבורה ו- X קבוצה. פעולה משמאל של G על X היא העתקה $\pi : G \times X \to X$ המקיימת:

- $\pi(g_1 g_2, x) = \pi(g_1, \pi(g_2, x))$
- $\pi(e, x) = x$ (הערה: e הוא לאו דווקא האיבר היחיד הפועל טריוויאלית)

סימון: בדרך כלל נסמן $g * x$ במקום $\pi(g,x)$.

דוגמאות:

I. $GL_n(\mathbb{R})$ פועלת על $\mathbb{R}^n$: $g * v := g \cdot v$.
II. $S(X)$ פועלת על X: $f * x = f(x)$.
III. חבורה G הפועלת על עצמה על ידי הצמדה: $g * x = gxg^{-1}$.
IV. כל חבורה פועלת על אוסף תת החבורות שלה על ידי הצמדה: $g * H = gHg^{-1}$.
V. הפעולה הטריויאלית של חבורה על X: $g * x = x$.

<u>הגדרה</u>: אם G פועלת על X אז היחס על X: $x_1 \sim x_2$ - אם יש $g \in G$ כך ש- $g*x_1 = x_2$ הוא יחס שקילות על X. מחלקות השקילות של יחס זה נקראות מסלולי- G ($G-orbits$).
נראה שזהו אכן יחס שקילות:
רפלקסיביות: $e*x = x \Leftarrow x \sim x$.
סימטריות: אם $x \sim y$, אז יש g כך ש- $g*x = y$, אבל אז $g^{-1}*y = x$, שכן:

$$x = e*x = (g^{-1}g)*x = g^{-1}*(g*x) = g^{-1}*y$$

ולכן $y \sim x$.
טרנזיטיביות: אם $x \sim y,\ y \sim z$, אז קיימים $g, h \in G$ כך ש- $g*x = y, h*y = z$, ולכן:

$$(hg)*x = h*(g*x) = h*y = z$$

כלומר $x \sim z$.

<u>הערה</u>: $X = \dot{\bigcup}_{i \in I} \{g*x_i \mid g \in G\}$ כאשר $\{x_i\}_{i \in I}$ זו מערכת מייצגים של מסלולי G (קרי, מחלקות השקילות).