

אלגברה ב' 1 - הרצאה 3 - 30.8.12

טענה: אם G חבורה, $H \leq G$, $[G:H] = 2$, אז $H \triangleleft G$.

הוכחה: ניקח $g \in G$, אם $g \in H$ אזי $gH = H = Hg$. אם $g \notin H$, לפי טענה מהשיעור שעבר מתקיים:

$$G = H \uplus gH, G = H \uplus Hg \\ \Rightarrow gH = G \setminus H = Hg$$

טענה: תהי G חבורה, ונניח ש- $N_1, N_2 \triangleleft G$, אזי מתקיים: $N_1 \cap N_2 \triangleleft G$.

הוכחה: יהיו $g \in G, h \in N_1 \cap N_2$.

$$gNg^{-1} \in N_1, gNg^{-1} \in N_2 \Rightarrow gNg^{-1} \in N_1 \cap N_2$$

הערה: ניתן להכליל את הטענה לאוסף $\{N_i\}_{i=1}^n$, ואז יתקיים $\bigcap_{i=1}^n N_i \triangleleft G$.


טענה: נניח $H \leq G, N \triangleleft G$, אזי $HN \leq G$.

הוכחה: יהיו $h_1 n_1, h_2 n_2 \in HN$.

$$h_1 n_1 \cdot h_2 n_2 = h_1 (n_1 h_2) n_2 = h_1 (h_2 n_1') n_2 \in HN$$

כי $n_1 h_2 \in N h_2 = h_2 N$ (נורמלית). לכן HN מקיימת סגירות לפעולה.

$$(h_1 n_1)^{-1} = n_1^{-1} h_1^{-1} = h_1^{-1} n' \in HN$$

מאותם שיקולים, ולכן HN מקיימת סגירות להפכי, כלומר זו תת חבורה של G . 

הערה: באופן שקול, גם NH תת חבורה.

טענה: אם $H \triangleleft G, N \triangleleft G$, אזי $HN \triangleleft G$.

הוכחה: לפי טענה קודמת זו תת חבורה. נראה שהיא נורמלית.

יהיו $g \in G, hn \in HN$. מתקיים:

$$ghng^{-1} = \underbrace{(ghg^{-1})}_{\in H} \underbrace{(gng^{-1})}_{\in N} \in HN$$



תרגיל: נניח ש- $H_1, H_2 \leq G$, G סופית. אזי:

$$|H_1 H_2| = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|}$$

משפט ההומומורפיזם (משפט האיזומורפיזם הראשון): תהי G חבורה, ויהי $\varphi: G \rightarrow K$ הומומורפיזם. אזי: $G/\ker \varphi \cong \text{Im } \varphi$.


הוכחה: נגדיר העתקה $\xi: G/\ker \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ על ידי $\xi(g \cdot \ker \varphi) = \varphi(g)$. נראה ש- ξ מוגדרת היטב.

נניח $g_1 \ker \varphi = g_2 \ker \varphi$, אז $g_1^{-1} g_2 \in \ker \varphi$. לפיכך, $(\varphi(g_1))^{-1} \varphi(g_2) = \varphi(g_1^{-1} g_2) = e$, כלומר $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$.

$$\xi(g_1 \ker \varphi \cdot g_3 \ker \varphi) = \xi(g_1 g_3 \ker \varphi) = \varphi(g_1 g_3) = \varphi(g_1) \varphi(g_3) = \xi(g_1 \ker \varphi) \xi(g_3 \ker \varphi)$$

לכן ξ הומומורפיזם. נראה חח"ע:

$$\varphi(g) = \xi(g \ker \varphi) = e \Rightarrow g \in \ker \varphi \Rightarrow g \ker \varphi = \ker \varphi$$

נראה ש- ξ על. ניקח $\varphi(g) \in \text{Im } \varphi$, אזי $g \ker \varphi$ מקור של $\varphi(g)$ תחת ξ , לכן ξ על, כלומר ξ איזומורפיזם. 

דוגמה: נגדיר ההעתקה $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_4$ על ידי $\varphi(k) = k \bmod 4$. קל לראות ש- φ הומומורפיזם, ומתקיים:

$$\begin{aligned} \text{Im } \varphi &= \{0, 1, 2, 3\} = \mathbb{Z}_4 \\ \ker \varphi &= \{k \mid \varphi(k) = 0\} = 4\mathbb{Z} \end{aligned}$$

לכן, לפי משפט ההומומורפיזם, מתקיים $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$ (וזה למשל, הסבר לסימון מתורת המספרים).

דוגמה: מהו \mathbb{R}/\mathbb{Z} ?

נסמן ב- C את מעגל היחידה המרוכב. זוהי חבורה ביחס לכפל המרוכב. נראה $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C$. נגדיר העתקה $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow C$ על ידי $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$. לפי חוקי חזקות, זהו הומומורפיזם. נראה ש-

$$\text{על: נניח } z \in C, \text{ ונוכל לכתוב } z = e^{i\theta}, \text{ אבל } z = e^{i\theta} = e^{i \cdot \frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi} = \varphi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right).$$

$$\ker \varphi = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x) = 1\} = \mathbb{Z}$$

לכן, לפי משפט ההומומורפיזם, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C$.

הערה: כל אפימורפיזם הוא העתקת מנה.

הסבר: אם $\varphi: H \rightarrow G$ אפימורפיזם, אזי לפי משפט ההומומורפיזם $G/\ker \varphi \cong K$.

דוגמה: מהי \mathbb{C}^x/C ? נגדיר העתקה $\varphi: \mathbb{C}^x \rightarrow \mathbb{R}^x$ על ידי $\varphi(z) = |z|$, אזי מתקיים:

$$\varphi(zw) = |zw| = |z||w| = \varphi(z)\varphi(w)$$

ולכן φ הומומורפיזם.

$$\text{Im } \varphi = (0, \infty)$$

$$\ker \varphi = \{z \in \mathbb{C}^x \mid |z| = 1\} = C$$

לכן, לפי משפט ההומומורפיזם, $\mathbb{C}^x/C \cong (0, \infty)$.

תרגיל: מהי $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$? כאשר $GL_n(\mathbb{R})$ זו חבורת המטריצות ההפיכות מסדר n ,

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid |A| = 1\}$$

טענה: $SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R})$ וחבורת המנה המתאימה היא \mathbb{R}^x .

הוכחה: נגדיר העתקה $\varphi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^x$ ע"י $\varphi(A) = |A|$. מכפלויות הדטרמיננטה φ

$$\text{הומומורפיזם. } \text{Im } \varphi = \mathbb{R}^x, \text{ כי עבור } x \in \mathbb{R}^x \text{ מתקיים } x = \varphi \left(\begin{pmatrix} x & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ מתקיים}$$

$$\ker \varphi = SL_n(\mathbb{R}), \text{ ולכן } SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R}) \text{ ו-} \mathbb{R}^x \cong GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}).$$

הגדרה: תהי G חבורה ו- $N \triangleleft G$. נסמן ב- π את ההעתקה הקונונית $\pi: G \rightarrow G/N$ המוגדרת על ידי $\pi(g) = gN$. ברור ש- π אפימורפיזם.

משפט ההומומורפיזם (גרסא מורחבת): יהי $\varphi: G \rightarrow H$ הומומורפיזם של חבורות, כך ש- $N \leq \ker \varphi$, אז קיים הומומורפיזם יחיד $\varphi^*: G/N \rightarrow H$ המקיים $\varphi^* \circ \pi = \varphi$. יתר על כן, מתקיים:

$$\text{I. } \ker \varphi^* = N$$

$$\text{II. } \text{Im } \varphi^* = \text{Im } \varphi$$

הוכחה: נגדיר את φ^* להיות $\varphi^*(gN) = \varphi(g)$. נבדוק ש- φ^* מוגדר היטב. נניח $g_1N = g_2N$, אז $g_2^{-1}g_1 \in N \subseteq \ker \varphi$. לכן $\varphi(g_2^{-1}g_1) = e$, כלומר $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. בודקים ישירות ש- φ^* הומומורפיזם.

$$(\varphi^* \circ \pi)(g) = \varphi^*(\pi(g)) = \varphi^*(gN) = \varphi(g)$$

לכן $\varphi^* \circ \pi = \varphi$.

נראה יחידות: אם $\psi: G/N \rightarrow H$ הומו' כך ש- $\psi \circ \pi = \varphi$ אז:

$$\begin{aligned}\psi(\pi(g)) &= \varphi(g) \\ \psi(gN) &= \varphi(g) = \varphi^*(gN) \Rightarrow \psi = \varphi^*\end{aligned}$$

$$\ker \varphi^* = \{gN \mid \varphi(g) = e\} = \{gN \mid g \in \ker \varphi\}$$

$$\ker \varphi^* = N \Leftrightarrow \{gN \mid g \in \ker \varphi\} = N \Leftrightarrow \{g \mid g \in \ker \varphi\} = \{g \mid g \in N\} \Leftrightarrow \ker \varphi = N \quad .I$$

$$\text{Im } \varphi^* = \{\varphi^*(gN) \mid gN \in G/N\} = \{\varphi^*(gN) \mid g \in G\} = \{\varphi(g) \mid g \in G\} = \text{Im } \varphi \quad .II$$



משפט האיזומורפיזם השני: תהא G חבורה, $H \leq G$, $N \triangleleft G$, $HN \triangleleft G$, אזי מתקיים:

$$HN/N \cong H/H \cap N$$

הערות:

I. נניח ש- $G_3 \leq G_2 \leq G_1$. אם $G_3 \leq G_1$, אז $G_3 \leq G_2$. זאת מכיוון שאם $g_3 \in G_3$, $g_2 \in G_2$,

אזי $g_2 g_3 g_2^{-1} \in G_3$, כי בפרט $g_2 \in G_1$.

II. אם $H \leq G$, $N \triangleleft G$, אזי $H \cap N \triangleleft H$.

נניח $h \in H$, $n \in H \cap N$, אזי $hnh^{-1} \in N$ מהנורמליות של N , ו- $hnh^{-1} \in H$ בשל סגירות h לפעולה.

הוכחת המשפט: נגדיר העתקה $\varphi: H \rightarrow HN/N$ על ידי $\varphi(h) = h \cdot e \cdot N = hN$.

$$\varphi(h_1 h_2) = h_1 h_2 N = h_1 N \cdot h_2 N = \varphi(h_1) \cdot \varphi(h_2)$$

לכן φ הומומורפיזם. נראה: $\text{Im } \varphi = \{hN \mid h \in H\}$.

נניח ש- $hnN \in HN/N$, ואז $\varphi(h) = hN = hnN$ ולכן φ על.

$$\ker \varphi = \{h \in H \mid \varphi(h) = N\} = \{h \in H \mid hN = N\} = \{h \in H \mid h \in N\} = H \cap N$$

ולכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון: $H/H \cap N \cong HN/N$.

הגדרה: תהא G חבורה, $\emptyset \neq A \subseteq G$. התת חבורה הנוצרת על ידי A , המסומנת $\langle A \rangle$, היא:

$$\langle A \rangle = \{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \mid a_i \in A \cup A^{-1}\}$$

קל לראות שזו אכן תת חבורה (סגירות להפכי, לפעולה).

אפיון שקול: $\langle A \rangle$ היא חיתוך של התת חבורות של G שמכילות את A .

הוכחה: נסמן ב- $\{H_i\}_{i \in I}$ את אוסף תת החבורות של G שמכילות את A . אם $i \in I$ ונניח

$a_1, a_2, \dots, a_k \in \langle A \rangle$, אזי $a_1, a_2, \dots, a_n \in H_i$ (סגירות), לכן $\langle A \rangle \subseteq \bigcap_{i \in I} H_i$. גם $\langle A \rangle$ זו תת חבורה

של G המכילה את A , לכן קיים i עבורו $\langle A \rangle = H_i$, ולכן $\langle A \rangle = H_i \supseteq \bigcap_{j \in I} H_j$. \square

לפיכך, $\langle A \rangle = \bigcap_{i \in I} H_i$. במילים אחרות, $\langle A \rangle$ זו התת חבורה הקטנה ביותר של G המכילה את A .

טענה: תהי G חבורה סופית שבה שבה כל איבר חוץ מאיבר היחידה הוא מסדר 2. הוכח שהסדר של G הוא 2^k .

הוכחה: נראה תחילה כי G אבליית. נניח $x, y \in G$.

$$(xy)^2 = e = (xy)(xy) \\ \Rightarrow yx = (xy)(xyx) = xy$$

לכן G אבליית. תהי $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ קבוצת יוצרים מינימלית של G , כלומר $\langle A \rangle = G$ סופית, ולכן קבוצה כזו קיימת). לפיכך, כל איבר g ב- G ניתן לכתוב בצורה יחידה:

$$g = a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot \dots \cdot a_n^{e_n}$$

כאשר $e_i \in \{0, 1\}$. נוכיח את יחידות ההצגה: נניח בשלילה ש:

$$g = a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot \dots \cdot a_n^{e_n} = a_1^{f_1} \cdot a_2^{f_2} \cdot \dots \cdot a_n^{f_n}$$

כאשר בה"כ $e_1 = 0, f_1 = 1$. ניתן לכתוב: $a_1 = a_2^{e_2 - f_2} \cdot a_3^{e_3 - f_3} \cdot \dots \cdot a_n^{e_n - f_n}$, בסתירה למינימליות קבוצת היוצרים.

נגדיר העתקה $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ ע"י:

$$\varphi(a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot \dots \cdot a_n^{e_n}) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

ברור ש- φ על. φ חח"ע מיחידות ההצגה של איברי G . לכן, $|G| = |\mathbb{Z}_2^n| = 2^n$. \square