סיכום החומר – תורת הגרפים

הגדרות בסיסיות:

<u>גרף:</u> הוא זוג סדור $< V, E >$ כאשר V קבוצה של קודקודים סופית ולא ריקה ו E קבוצת זוגות <u>לא</u> סדורים של הקודקודים שנקראים קשתות הגרף. (גרף לא מכוון, בגרף מכוון הזוגות סדורים)

<u>לולאה:</u> היא קשת מקודקוד לעצמו, כלומר (v, v).

<u>קשתות כפולות:</u> נאמר שבגרף יש קשתות כפולות אם בין שני קודקודים יש יותר מקשת אחת

<u>גרף פשוט:</u> גרף נטול לולאות וקשתות כפולות. בקורס נתעסק בעיקר בגרפים כאלה.

<u>שכנים:</u> שני קודקודים שמחברת בינהם קשת נקראים שכנים בגרף.

<u>צלע סמוכה לקודקוד:</u> צלע e נקראת סמוכה לקודקוד v אם v הוא אחד מקצוותיה, כלומר $v \in e$. באופן שקול נאמר שהצלע e חלה בקודקוד v.

<u>צלע סמוכה לצלע:</u> נאמר ששתי צלעות e_1, e_2 הן סמוכות אם הן חולקות קודקוד כלומר $e_1 \cap e_2 \neq \phi$

<u>איזומורפיזם בין גרפים:</u> עבור שני גרפים $G_1 =< V_1, E_1 >, G_2 =< V_2, E_2 >$ נאמר שהם איזומורפים אם קיימת פונקציה $\varphi: V_1 \to V_2$ חד חד ערכית ועל כך ש $(u, v) \in E_1 \leftrightarrow \big(\varphi(u)\varphi(v)\big) \in E_2$. כלומר היא משמרת את המבנה של הגרף ורק מחליפה את שמות הקודקודים. איזומורפיזם בין גרפים הוא יחס שקילות ומחלק את כול הגרפים בעולם למחלקות שקילות שנקראות גרף לא מסומן.

<u>מטריצה שכנויות:</u> עבור גרף $G =< V, E >$ כך שקודקודיו הם $V = [n]$ אז מטריצת השכנויות של הגרף היא מטריצה $n \text{ x } n$ מעל Z_2 שנקרא לה A המקיימת $A_{i,j} = 1$ אם ורק אם הקשת (i, j) בגרף. עבור גרף לא מכוון זו מטריצה סימטרית, ובגרף פשוט האלכסון כולו אפסים.

<u>מטריצת הסמיכויות/ החילה:</u> עבור גרף $G =< V, E >$ כך ש $V = [n]$ ו $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ נגדיר את מטריצה החילה שלו להיות מטריצה $n \text{ x } m$ מעל Z_2 שנסמנה A המקיימת $A_{i,j} = 1$ אם ורק אם הקשת e_j סמוכה לקודקוד i. נשים לב שבכול עמודה יש רק שני תאים שאינם אפס, וזאת משום שלכול קשת יש רק שני קצוות.

<u>תת גרף:</u> יהי גרף $G =< V, E >$ נאמר ש $H =< U, F >$ תת גרף של G אם מתקיים $U \subseteq V$ וגם $F \subseteq E$.

<u>תת גרף פורש:</u> תת גרף H של גרף G יקרא פורש לG אם $V(H) = V(G)$. כלומר הוא מכיל את כול הקודקודים של הגרף אב שלו.

<u>תת גרף נפרש:</u> עבור גרף $G =< V, E >$ ותת קבוצה של קודקודים $U \subseteq V$, אז נגדיר את התת גרף הנפרש על ידי U להיות גרף שקודקודיו הם U וקשתותיו הן קשתות G ששני קצותיהם הם קודקודים ב U. נסמן $G(U) =< U, \{e \in E \mid e \subseteq U\} >$.

<u>גרף משלים:</u> עבור $G =< V, E >$ נגדיר את הגרף המשלים שלו להיות $\bar{G}$ שהוא על אותם הקודקודים אבל הקשתות שלו הן $E(\bar{G}) = \{(u, v) | u \neq v \text{ } and \text{ } (u, v) \notin E(G) \text{ } and \text{ } u, v \in V(G)\}$. כלומר הקשתות ההפוכות.

<u>גרף שלם:</u> גרף $G =< V, E >$ יקרא שלם אם לכול $u, v \in V$ מתקיים כי הקשת בינהם נמצאת בגרף, כלומר $(u, v) \in E$. נסמן K_n להיות הגרף השלם על n קודקודים.

גרף ריק: גרף $G =< V, E >$ נקרא ריק אם $E = \phi$, כלומר אין קשתות בכלל. נסמן את הגרף הריק על n קודקודים להיות $\overline{K_n}$ וזה משום שהגרף המשלים שלו הוא גרף שלם בגודל n.

גרף דו-צדדי: גרף $G =< V, E >$ נקרא דו צדדי אם אפשר לחלק את V לשתי קבוצות זרות $V = V_1 \cup V_2$ כך שכול קשת $e \in E$ מכילה בדיוק קודקוד אחד מ V_1 ובדיוק קודקוד אחד מ V_2.

גרף דו צדדי שלם: גרף $G =< V, E >$ נקרא דו צדדי שלם אם קיימת חלוקה של V לשתי קבוצות זרות $V = V_1 \cup V_2$ כך ש $E(G) = \{(u, v)\ s.t\ u \in V_1, v \in V_2\}$. נסמן $K_{m,n}$ את הגרף הדו צדדי השלם בעל צדדים בגדלים m, n.

גרף הצלעות / הגרף הלינארי: עבור גרף $G =< V, E >$ בעל צלעות $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ נגדיר את גרף הצלעות שלו $L(G)$ להיות גרף שקודקודיו הם $\{e_1, \dots, e_m\}$ ו $\left(e_i, e_j\right) \in E\left(L(G)\right)$ אם ורק אם e_i, e_j קשתות סמוכות בגרף G כלומר חולקות קודקוד.

קליקה: עבור גרף $G =< V, E >$ נאמר שתת קבוצה של קודקודים $U \subseteq V$ היא קליקה בגרף אם הגרף הנפרש על ידי U הוא גרף שלם. עבור גרף G נסמן $\omega(G)$ להיות גודל הקליקה הגדולה ביותר בתוכו.

קבוצה בלתי תלויה: עבור גרף $G =< V, E >$ נאמר שתת קבוצה של קודקודים $U \subseteq V$ היא קבוצה בלתי תלויה אם הגרף הנפרש על ידי U הוא גרף ריק. נסמן $\alpha(G)$ להיות גודל הקבוצה הבלתי תלויה הגדולה ביותר ב G.

הילוך בגרף: יהי $G =< V, E >$ גרף אז הילוך W ב G זו סדרה של קודקודים וקשתות לסירוגין $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2, \dots, v_{k-1} e_k v_k$ כאשר כול קשת e_i מקיימת $e_i = (v_{i-1}, v_i)$. אם הגרף פשוט מספיק לציין את הקודקודים בהילוך ואין צורך לציין הקשתות, כי כול שני קודקודים מגדירים ביחידות את הקשת ביניהם (אך עדיין דורשים שבין כול שניים רצופים אכן יש קשת). **את האורך של הילוך נמדוד במספר הקשתות** שבו, כלומר k עבור ההילוך לעיל.

מסילה: הילוך W בגרף G נקרא מסילה אם כול קשת מופיעה בו לכול היותר פעם אחת. כלומר לא חוזרים על אותה הקשת פעמיים.

מסלול: הילוך W בגרף G יקרא מסלול אם כול קודקוד מופיע לכול היותר פעם אחת, כלומר לא חוזרים על אף קודקוד פעמיים.

מרחק: עבור שני קודקודים $u, v \in V$ נגדיר את המרחק בינהם $dist(u, v)$ להיות האורך בצלעות של המסלול הקצר ביותר בין u ל v בגרף או ∞ אם הם לא באותו רכיב קשירות.

מעגל: מעגל C בגרף G הוא הילוך $v_0, \dots, v_k$ כך ש $v_0 = v_k$ ואין שום זוג קודקודים אחר ששווים ביניהם, כלומר זה מסלול שקודקוד ההתחלה וקודקוד הסיום זהים. **אורך של מעגל נמדד במספר הקשתות שבו**. אם אורך של מעגל הוא זוגי נקרא לו מעגל זוגי, אחרת מעגל אי זוגי. נסמן C_k להיות המעגל בעל k צלעות.

קשירות: עבור גרף $G =< V, E >$ נאמר ששני קודקודים הם קשירים אם קיים מסלול ביניהם בגרף. לכול גרף G לא מכוון יחס הקשירות בין קודקודים הוא יחס שקילות ולכן מפרק את קודקודי הגרף למחלקות שקילות שנקרא להן רכיבי קשירות.

גרף קשיר: גרף $G =< V, E >$ יקרא קשיר אם יש בו רכיב קשירות יחיד.

דרגה: עבור גרף $G=<V,E>$ וקודקוד $v\in V$ נגדיר את הדרגה שלו $d_G(v)$ להיות מספר הקשתות שסמוכות לו. נסמן $\Delta(G)$ להיות הדרגה המקסימלית של גרף, $\delta(G)$ להיות הדרגה המינמלית ו $\bar{d}(G)$ להיות הדרגה הממוצעת, כלומר $\bar{d}(G)=\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}d_G(v)$

גרף d רגולרי: גרף שמקיים שדרגת כול קודקודיו היא d.

טענות טריוויאליות בעקבות ההגדרות הפשוטות:

- קבוצת קודקודים היא קליקה אם ורק אם היא קבוצה בלתי תלויה בגרף המשלים ולכן $\alpha(G)=\omega(\bar{G})$ וגם $\omega(G)=\alpha(\bar{G})$.
- חיתוך בין קליקה לבין קבוצה בלתי תלויה הוא לכול היותר מגודל 1, כי אחרת אם היו שני קודקודים אז גם הקשת בינהן הייתה כי זה קליקה, אבל היא גם לא הייתה כי זה קבוצה בלתי תלויה.
- אם בגרף G יש הילוך בין u ל v אז יש גם מסלול בינהם. הוכחה טריוויאלית באינדוקציה, כי אם קודקוד מופיע פעמיים אפשר לקצר את כול המקטע בין שני המופעים שלו ולקבל הילוך קצר ממש ואז מאינדוקציה לקבל מסלול בין הקצוות.
- בגרף בעל n קודקודים ו m קשתות יש לפחות $n-m$ רכיבי קשירות. זה נובע מיידית מכך שללא קשתות בגרף יש n רכיבי קשירות, וכול קשת שמוספים מקטינה מספר זה בלכול היותר אחד. בפרט בגרף קשיר יש לפחות $n-1$ קשתות.
- בגרף פשוט בעל דרגה מינמלית $\delta(G)$ יש מסלול באורך $\delta(G)$ ומעגל באורך $\delta(G)+1$. מסתכלים על המסלול הארוך ביותר, כול קשת של קודקוד הקצה חייבת לחזור חזרה לתוך המסלול, אחרת היה אפשר להאריך אותו. לכן יש לפחות $\delta(G)$ קשתות שחוזרות לתוך המסלול וכולן מסתיימות בקודקוד שונה לכן יש $\delta(G)+1$ קודקודים לפחות ולכן המסלול באורך לפחות $\delta(G)$ קשתות. עבור מעגל פשוט נוסיף קשת חוזרת הרחוקה ביותר ונקבל הנדרש.
- סכום הדרגות בגרף הוא פעמיים מספר הקשתות ובפרט מספר זוגי, כי כול קשת נספרת פעם אחת בכול קודקוד קצה שלה. בפרט בגרף יש מספר אי זוגי של קודקודים מדרגה אי זוגית.

עצים:

הגדרות:

- יער: גרף $G=<V,E>$ נקרא יער אם הוא חסר מעגלים
- עץ: גרף $G=<V,E>$ נקרא עץ אם הוא יער קשיר.
- עלה: עבור G עץ, קודקוד $v\in V(G)$ יקרא עלה אם $d_G(v)=1$.
- גשר: עבור גרף G קשיר נאמר שקשת $e\in E(G)$ היא גשר אם $G\setminus e$ אינו קשיר.

טענות:

יער הוא איחוד זר של עצים: ניקח יער נפרק אותו לרכיבי קשירות, כול רכיב קשירות הוא עץ כי הוא עדיין חסר מעגלים, וכול העצים זרים כי הם רכיבי קשירות שונים.

בעץ(בעל לפחות שני קודקודים) יש לפחות שני עלים והסרה של עלה משאירה אותו עץ: ואכן נתבונן במסלול הארוך ביותר בעץ, הוא לפחות מאורך קשת אחת כי יש לפחות שני קודקודים וזה גרף קשיר. יהיו u,v קצוות המסלול אז כול הקשתות שיוצאות מהם חוזרות לתוך המסלול וסוגרות מעגל, לכן משום שאין מעגלים אין אף קשת שיוצאת מהם פרט לקשת המסלול, לכן דרגתם 1 ולכן יש שני עלים.

כמו כן הסרה של עלה משאירה את העץ חסר מעגלים, וכמו כן הוא ישאר קשיר כי לא יתכן שהעלה היה קודקוד ביניים באיזשהו מסלול כי דרגתו 1.

<u>משפט האפיון לעצים:</u> הטענות הבאות שקולות עבור גרף $G =< V, E >$ כאשר $|V| = n$

- G הוא עץ
- G קשיר בעל $n - 1$ קשתות
- G בעל $n - 1$ קשתות וחסר מעגלים
- ב G יש מסלול אחד בדיוק בין כול שני קודקודים.

קל לראות שאם G עץ אז יש לו $n - 1$ קשתות פשוט מאינדוקציה והסרה של עלה ולכן קיבלנו שאחד גורר את שתיים ושלוש. שתיים גורר את אחד ושלוש כי לגרף קשיר בעל $n - 1$ קשתות אין מעגלים כי נוריד ממנו קשתות עד שאין בו יותר מעגלים, ברור שהוא נשאר קשיר, וכעת אין בו מעגלים, לכן יש בו $n - 1$ קשתות מהטענה הקודמת, לכן לא הסרנו אף קשת ולכן מראש לא היו בו מעגלים. שלוש גורר את אחד ושתיים כי אם גרף בעל $n - 1$ קשתות וחסר מעגלים אז כול רכיב קשירות שלו הוא עץ ולכן בכול רכיב קשירות יש $k - 1$ קשתות כאשר k זה גודל הרכיב. סכום הקשתות בכול הרכיבים הוא סך כול הקשתות שזה $n - 1$. לכן $n - j = n - 1$ כאשר j מספר רכיבי הקשירות, לכן $j = 1$ לכן הוא קשיר. ברור שאחד גורר את ארבע כי אם גרף הוא עץ אז הוא קשיר ולכן יש לפחות מסלול אחד בין כול שני קודקודים, ואם היה זוג שהיו בינהם יותר ממסלול אחד אז היא מעגל בגרף בסתירה להיותו עץ. כמו כן ארבע גורר את אחד זה גם מיידי כי אם יש מסלול בין כול שני קודקודים אז הגרף קשיר, ולא יתכן שיש מעגל בגרף כי אחרת היו שני קודקודים שהיו בינהם שני מסלולים שונים לפחות.

- <u>בגרף קשיר יש לפחות $n - 1$ קשתות:</u> זה נובע מיידית מהאפיון לעצים, כי לכול גרף קשיר אפשר להסיר קשתות עד שייעלמו כול המעגלים הוא יישאר קשיר וחסר מעגלים ולכן עץ ולכן יכיל $n - 1$ קשתות, לכן במקור היו לו לפחות $n - 1$.
- <u>הוספת צלע לעץ סוגרת מעגל:</u> נניח הוספנו הקשת (u, v) לעץ שלא הייתה שם קודם, אז יש מסלול יחיד בין u ל v בעץ שלא משתמש ב (u, v) ולכן יחד עם הקשת הזו נסגר מעגל.
- <u>כול צלע של עץ היא גשר:</u> בעץ יש $n - 1$ קשתות ולכן כול קשת שנסיר תביא לכך שיהיו $n - 2$ קשתות ולכן מהטענה לעיל לא יתכן שהגרף קשיר, לכן הקשת הזו הייתה גשר.

<u>נוסחת קיילי לעצים פורשים (מופיע בחלק של המשפטים שצריך להוכיח)</u>

<u>משפט העצים והמטריצות (מופיע בחלק של משפטים מגניבים שלא צריך לדעת להוכיח)</u>

<u>קשירות</u>

הגדרות:

- <u>חתך קודקודי:</u> עבור גרף $G =< V, E >$ נאמר ש $S \subseteq V$ הוא חתך קודקודי אם $G \setminus S$ הוא גרף לא קשיר. (אם הגרף מראש לא קשיר אז ϕ היא חתך קודקודי)
- <u>קשירות קודקודית:</u> עבור $G =< V, E >$ נגדיר את $\kappa(G)$ להיות הגודל המינמלי של חתך קודקודי בגרף כלומר גודל הקבוצה הקטנה ביותר של קודקודים שהסרתה הופכת את הגרף ללא קשיר. אם לא קיימת כזו אז $\kappa(G) = |V| - 1$. נאמר שגרף הוא k קשיר קודקודית אם $\kappa(G) \geq k$.
- <u>קבוצה מפרידה:</u> נאמר ש $F \subseteq E$ תת קבוצה של קשתות היא קבוצה מפרידה אם $G \setminus F$ כלומר הגרף על $(V, E \setminus F)$ הוא אינו קשיר.

- <u>קשירות צלעית:</u> עבור גרף G נסמן ב $\kappa'(G)$ את הגודל המינמלי של קבוצה מפרידה בG. נאמר שגרף הוא k קשיר צלעית אם $\kappa'(G) \geq k$.
- <u>חתך:</u> עבור גרף $G = (V, E)$ ותת קבוצה $S \subseteq V$ לא ריקה של קודקודים אז $[S, \bar{S}]$ נקרא חתך והוא קבוצת כול הצלעות ב G שקצה אחד שלהן ב S והשני ב $\bar{S}$.
- <u>קודקוד חתך:</u> עבור גרף קשיר, נאמר ש $v \in V$ הוא קודקוד חתך אם לאחר הסרת v הגרף אינו קשיר יותר.
- <u>בלוק:</u> עבור גרף $G = (V, E)$, B תת גרף של G יקרא בלוק אם B קשיר ומקסימלי ביחס להכלה כך ש B לא מכיל קודקוד חתך(של עצמו!). כלומר ב B אין קודקודים שהסרתם תהפוך את B ללא קשיר, לכן B הוא 2 קשיר קודקודית. לכן B הוא תת גרף 2 קשיר קודקודית מקסימלי בהכלה.
- <u>גרף הבלוקים:</u> עבור גרף $G = (V, E)$ נגדיר את גרף הבלוקים שלו להיות Γ כך ש Γ דו צדדי שבצד אחד שלו נמצאים הבלוקים של G ובצד השני קודקודי החתך של G, ויש קשת מבלוק לקודקוד חתך אם הקודקוד שייך לבלוק.
  - <u>בלוק קצה:</u> ראינו שגרף הבלוקים של גרף קשיר הוא עץ. אם הגרף קשיר אבל לא שתיים קשיר אז העץ אינו טריוויאלי, לעלים של העץ נקרא בלוקי הקצה.
- <u>קבוצה מפרידה:</u> עבור גרף $G = (V, E)$ ושתי קבוצות קודקודים $A, B \subseteq V$ לא בהכרח זרות, נאמר שקבוצת קודקודים $X \subseteq V$ מפרידה בין A ל B אם בגרף $G(V \backslash X)$ כלומר הגרף הנפרש מ $V \backslash X$ אין מסלול בין $A \backslash X$ לבין $B \backslash X$.

טענות:

- לכול גרף G מתקיים $\kappa(G) \leq \delta(G)$. בבירור, כי קבוצת השכנים של קודקוד היא חתך קודקודי בגרף, ולכן עבור הקודקוד בעל הדרגה המינמלית קבוצת שכניו היא חתך קודקודי, ובפרט $\kappa(G) \leq \delta(G)$.
- **<u>דרגה מינימלית גבוהה לא מבטיח קשירות קודקודית גבוהה!</u>** יכול להיות איחוד זר של שתי קליקות שהוא בכלל לא קשיר אבל הדרגה המינימלית מאוד גבוהה.
- **<u>משפט $Mader$ (מופיע בחלק של משפטים שצריך לדעת להוכיח)</u>**
- **<u>קבוצה מפרידה מינימלית (ביחס להכלה) למעשה מהווה חתך</u>:** כי לאחר הסרתה הגרף מתפרק לרכיבי קשירות, אם נבחר רכיב קשירות אחד מביניהם S אז כול החתך $[S, \bar{S}]$ הוא כול הקשתות שיוצאות מהרכיב הזה אל עבר רכיבי קשירות אחרים, ולכן כול הקשתות הללו חייבות להיות בקבוצה המפרידה כי אחרת זה לא היה רכיב קשירות שונה. בנוסף לא יתכן שיש קשתות נוספת בקבוצה המפרידה פרט לקשתות החתך כי אחרת זו לא הייתה קבוצה מפרידה מינמלית להכלה, כי לאחר הסרת הקשתות הללו זו עדיין קבוצה מפרידה. לכן הקשירות הצלעית של גרף זה למעשה הגודל המינמלי של חתך.
- **<u>משפט: לכול גרף $G = (V, E)$ מתקיים $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$ (הוכחה במשפטים שלא צריך לדעת להוכיח).</u>**
- **<u>משפט $Whitney$: לכול גרף על לפחות 3 קודקודים הוא 2 קשיר קודקודית אמ"מ בין כול שני קודקודים יש זוג מסלולים זרי פנים בקודקודים.(הוכחה במשפטים שלא צריך לדעת להוכיח)</u>**
- גרף על לפחות 3 קודקודים הוא 2 קשיר קודקודית אם ורק אם כול זוג קודקודים נמצאים על מעגל משותף. נובע מיידית מהשמפט לעיל.
- **<u>חיתוך של שני בלוקים מכיל לכול היותר קודקוד אחד:</u>** נניח בשלילה שעבור A, B שני בלוקים החיתוך מכיל שני קודקודים u, v שונים. אזי נתבונן ב $A \cup B$ ונראה שהוא גם שתיים קשיר בסתירה למקסימליות להכלה. ואכן אם הסרנו קודקוד w מ $A \cup B$ עדיין אפשר להגיע מכול קודקוד לכול קודקוד כי נשתמש בזה שלא הוצאנו (אם זה אחד מ u, v).

- **<u>גרף הבלוקים של גרף קשיר הוא עץ:</u>** ברור שאין מעגל בגרף הבלוקים, כי אחרת אם היה מעגל אז איחוד קבוצת הבלוקים שמשתייכים למעגל הייתה קבוצה שתיים קשירה גדולה יותר בסתירה למקסימליות להכלה של כול אחד מהם. כמו כן גרף הבלוקים קשיר, כי הגרף המקורי קשיר ולכן כול שני בלקים מחוברים בקשת יחידה, כי אחרת היה מעגל וזה היה אותו הבלוק ולכן קודקודי הקשת הזו הם קודקודי חתך בגרף.
- **<u>משפט מנגר:</u>** עבור גרף $G = (V, E)$ ושתי קבוצות A, B של קודקודים אז המספר המקסימלי של מסלולים זרים בקודקודים (כולל הקצוות!!) בין A ל B שווה למספר המינמלי של קודקודים בקבוצה המפרידה בין A לבין B. (הוכחה במשפטים שלא צריך לדעת להוכיח אותם) בפרט למשל A עצמה מפרידה בינהן ולכן לא יכול להיות יותר מסלולים זרים בקודקודים מאשר מספר הקודקודים שיש ב A או ב B.
  - גרף הוא k קשיר אם ורק אם לכול זוג קודקודים יש k מסלולים זרי פנים בינהם.
  - גרף הוא k קשיר צלעית אם ורק אם לכול זוג קודקודים יש k מסלולים זרית בצלעות בינהם.

<u>מעגלי אוילר והמילטון</u>

הגדרות:

- <u>מעגל אוילר:</u> עבור $G = (V, E)$ אזי נגדיר מעגל אוילר בגרף G להיות הילוך סגור העובר בכול צלע של G בדיוק פעם אחת. גרף המכיל מעגל אוילר נקרא אוילריאני.
- <u>מעגל המילטון:</u> עבור גרף $G = (V, E)$ נאמר כי C הוא מעגל המילטון אם הוא מעגל בגרף העובר דרך כול קודקודיי G.
- <u>מסלול המילטון:</u> מסלול בגרף העובר דרך כול קודקודי הגרף (בדיוק פעם אחת כי זה מסלול)

טענות:

- <u>משפט אוילר:</u> גרף קשיר הוא אוילריאני אם ורק אם כול הדרגות זוגיות. (מופיע במשפטים שצריך לדעת להוכיח!)
- <u>קשר בין מעגל אוילר למעגל המילטון:</u> נשים לב שמעגל אוילר הוא מעגל המילטון בגרף הלינארי/ גרף הקשתות. (עד כדי מקרי קיצון מוזרים)
- <u>תנאי הכרחי לקיום מעגל המילטון:</u> עבור גרף G שמכיל מעגל המילטון חייב להתקיים כי לכול $V \supseteq S \neq \phi$ מספר רכיבי הקשירות של $G(V \backslash S)$ אינו גדול יותר מ $|S|$. (הוכחה במשפטים שלא צריך לדעת להוכיח)
- <u>משפט $Dirac$ תנאי מספיק לקיום מעגל המילטון.</u> (מופיע במשפטים שצריך לדעת להוכיח!)
  - <u>משפט Ore:</u> למעשה מספיק לדרוש שלכול זוג קודקודים מתקיים שסכום הדרגות שלהם הוא n, כי זה כול מה שהיינו צריכים כדי ליישם שובך היונים
- <u>משפט $Chvatal - Erdos$ – תנאי מספיק לקיום מעגל המילטון.</u> (מופיע במשפטים שצריך לדעת להוכיח!)

<u>זיווגים וכיסויים</u>

הגדרות:

- <u>זיווג:</u> עבור גרף $G = (V, E)$ זיווג בגרף הוא אוסף $E \supseteq M$ של צלעות זרות, כלומר צלעות שלא חולקות קודקוד. הגודל של זיווג הוא מספר הקשתות בו.
- <u>מספר הזיווג:</u> עבור גרף G נגדיר את $\mu(G)$ להיות הגודל המקסימלי של זיווג בגרף G.

- <u>כיסוי:</u> עבור גרף $G = (V, E)$ כיסוי של הגרף הוא קבוצת קודקודים $T \subseteq V$ כך שלכול קשת $e \in E$ אחד מקודקודיה שייך ל T כלומר $e \cap T \neq \phi$. הגודל של הכיסוי הוא מספר הקודקודים בו
- <u>מספר הכיסוי:</u> עבור גרף G נסמן $\tau(G)$ להיות הגודל המינמלי של כיסוי קודקודי של G.
- <u>זיווג מרווה:</u> עבור גרף $G = (V, E)$ וקבוצת קודקודים $A \subseteq V$ וזיווג M בגרף נאמר כי M מרווה את A אם לכול $a \in A$ קיימת קשת $e \in M$ כך ש $a \in e$. כלומר כול קודקודי A משתתפים בזיווג.
- <u>זיווג מושלם:</u> נאמר שזיווג M בגרף $G = (V, E)$ הוא מושלם אם כול הקודקודים משתתפים בו כלומר $\frac{|V|}{2} = |M|$. (ברור שלא יכול להיות זיווג גדול מזה כי הקשתות חייבות להיות זרות)
- <u>מערכת נציגים:</u> עבור $F = \{A_1, \dots, A_n\}$ משפחה של קבוצות, נאמר כי $\{a_1, \dots, a_n\}$ היא מערכת נציגים שונים עבור F אם $a_1 \in A_i$ לכול i וגם $a_i \neq a_j$ לכול i, j.

טענות:

- <u>קשר בין מספר כיסוי למספר זיווג:</u> בכול גרף מתקיים $\mu(G) \leq \tau(G) \leq 2\mu(G)$ (הוכחה מופיעה במשפטים שלא צריך לדעת להוכיח)
- <u>כיסוי וקבוצה בלתי תלויה:</u> T היא כיסוי בקודקודים לגרף, אם ורק אם $V \backslash T$ היא קבוצה בלתי תלויה, וזה ברור מיידית מהגגדרה, כי כול קשת בגרף נחתכת עם קודקוד ב T ולכן אין קשת בין שני קודקודים שאינם ב T.
- <u>משפט הול:</u> עבור גרף דו צדדי $(A \cup B, E)$ קיים בו זיווג המרווה את צד A אם ורק אם לכול $A \supseteq X \neq \phi$ מתקיים כי $|N_G(X)| \geq |X|$. כלומר אם ורק אם לכול תת קבוצה, כמות השכנים שלה גדולה מכמות האיברים בה. (הוכחה מופיעה במשפטים שצריך לדעת להוכיח)
- <u>מערכת נציגים ותנאי הול:</u> עבור F משפחה סופית של קבוצות סופיות אז יש לה מערכת נציגים שונים אם ורק אם לכול תת משפחה $I \subseteq F$ מתקיים כי $|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I|$. ואכן אם נגדיר גרף דו צדדי שבצד אחד נמצאים המספרים 1 עד n כך שכול אחד מייצג קבוצה במשפחה, ובצד השני יש קודקוד עבור כול איבר ב $\cup_{i=1}^{n} A_i$ וקשתות אם האיבר שייך לקבוצה המתאימה, אז בגרף יש זיווג מרווה את צד הקבוצות אם ורק אם יש מערכת נציגים שונים אם ורק אם תנאי הול מתקיים.
- <u>גרף דו צדדי r רגולרי מכיל זיווג מושלם:</u> יהי $G = (A \cup B, E)$ גרף דו צדדי r רגולרי. תחילה נשים לב כי$r|A| = \sum_{a \in A} d(a) = |E| = \sum_{b \in B} d(b) = r|B|$ ולכן $|A| = |B|$. נראה שתנאי הול מתקיים עבור צד A ונקבל זיווג מושלם, ואכן תהי $S \subseteq A$ קבוצה אז נסמן E_0 את הקשתות שיוצאות מ S וב E_1 את הקשתות שיוצאות מ $N(S)$. בבירור $E_0 \subseteq E_1$ כי כול קשת שיוצאת מS מגיעה לשכן של S. כמו כן $|E_0| = r|S|$ וגם $|E_1| = r|N(S)|$ ולכן מהכלה נקבל $r|S| \leq r|N(S)|$ ולכן $|S| \leq |N(S)|$ ולכן תנאי הול מתקיים ולכן יש זיווג מושלם.
- <u>משפט קניג:</u> בגרף דו צדדי מתקיים $\tau(G) = \mu(G)$.(הוכחה במשפטים שצריך לדעת להוכיח)
- <u>משפט $Tutte$ תנאי מספיק והכרחי לזיווג מושלם בגרף:</u> בגרף יש זיווג מושלם אם ורק אם לכול $S \subseteq V$ מתקיים $o(G \backslash S) \leq |S|$, כאשר זה מייצג את מספר רכיבי הקשירות מגודל אי זוגי בגרף לאחר שהסרנו את S. (הוכחה במשפטים שצריך לדעת להוכיח)
- <u>משפט $Peterson$:</u> בגרף 3 רגולרי 2 קשיר צלעית יש זיווג מושלם. (הוכחה במשפטים שצריך לדעת להוכיח)

צביעה קודקודית

הגדרות:

- צביעה: עבור גרף $G = (V, E)$ ויהי $k \in N$ מספר הצבעים אז פונקציה $f: V(G) \to [k]$ נקראת k צביעה של הגרף אם אין שני קודקודים שכנים בעלי אותו הצבע, כלומר לכול קשת $e \in E$ כך ש $e = (v, u)$ מתקיים $f(u) \neq f(v)$. אם לגרף קיימת k צביעה נאמר שהוא k צביע.
- המספר הכרומטי: עבור גרף $G = (V, E)$ נסמן $\chi(G)$ את המספר הכרומטי שלו להיות ה k המינמלי עבורו הגרף k צביע.
- הצביעה החמדנית: נגדיר אלגוריתם חמדן לצביעת גרף, שבהינתן גרף $G = (V, E)$ על n קודקודים ופרמוטציה על הקודקודים $\sigma: V \to [n]$ עובר על הקודקודים לפי הסדר σ וצובע כול קודקוד בצבע הנמוך ביותר שאפשר לצבוע אותו מבלי להפר את האילוץ שאין שני קודקודים סמוכים שצבועים באותו הצבע מבין כול הקודקודים שכבר נצבעו.
- גרף מנוון: עבור גרף $G = (V, E)$ נאמר שהוא d מנוון אם לכול תת גרף יש קודקוד מדרגה קטנה מ d. את הניוון של גרף נסמן $degen(G)$ וזה ה d המינמלי עבורו הגרף d מנוון.
בבירור מתקיים $degen(G) = \max_{G_0 \subseteq G} \delta(G_0)$ כי לכול תת גרף אכן יש קודקוד מהדרגה הזו או פחות, ולא יתכן מספר נמוך מזה כי אחרת יהיה לפחות תת גרף אחד שאין לו קודקוד מהדרגה הזו, כי זה יהיה פחות מהדרגה המינימלית שלו.
- גרף קריטי: גרף $G = (V, E)$ יקרא k קריטי אם $\chi(G) = k$ וכול תת גרף שלו ממש $G' \subseteq G$ מתקיים כי G' הוא $k - 1$ צביע.

טענות:

- צביעה של קליקה: מתקיים כי $\chi(K_n) = n$ כי כול שני קודקודים צריכים להיות בצבע שונה כי בין כול שניים יש קשת.
- אפיון של צביעה: נשים לב שלמעשה צביעה של גרף זה חלוקה שלו לאיחוד זר של קבוצות בלתי תלויות, כי קבוצת כול הקודקודים שקיבלו צבע מסוים היא קבוצה בלתי תלויה.
- חסמים טריוויאלים:
  - לכול תת גרף $G' \subseteq G$ מתקיים $\chi(G') \leq \chi(G)$, ברור כי צביעה לגרף כולו היא בפרט צביעה לתת הגרף ולכן הוא לפחות צביע בכמה צבעים שדרוש לצבוע את הגרף כולו.
  - $\omega(G) \leq \chi(G)$ כי עבור קליקה מספר הצביעה שלה הוא הגודל שלה, ומהטענה לעיל על תתי גרפים.
  - $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ וזה כי צביעה זה חלוקה לקבוצות בלתי תלויות, כול אחת מהן לא גדולה יותר מהקבוצה הבלתי תלויה הגדולה ביותר בגרף ולכן כדי לחלק את כול הקודקודים לקבוצות בלתי תלויות נצטרך לפחות כמות קבוצות שהיינו צריכים אם כולן היו בגודל של הכי גדולה.
  - לכול תת קבוצה $V_0 \subseteq V$ של קודקודים: $\chi(G) \leq \chi\big(G(V_0)\big) + \chi(G(V \backslash V_0))$ כי נצבע את $G(V_0)$ ולאחר מכן נצבע את $G(V \backslash V_0)$בצבעים חדשים לגמרי, ואיחוד הצביעות יהיה צביעה חוקית לגרף כולו כי זה צבעים שונים.
- מספר צביעה של גרף והמשלים שלו: לכול גרף G על n קודקודים $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$ וכמו כן זה חסם הדוק, כי למשל עבור קליקה. (הוכחה במשפטים שלא צריך לדעת להוכיח)
- ניוון של גרף: באופן טריוויאלי מתקיים $\delta(G) \leq degen(G) \leq \Delta(G)$.
- שימוש בניוון לחסם על מספר הצביעה: מתקיים כי $\chi(G) \leq 1 + degen(G)$ ובפרט $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$. (הוכחה במשפטים שלא צריך לדעת להוכיח)

- <u>משפט ברוקס:</u> למעט שני מקרי קצה אפשר לקבל $\chi(G) \leq \Delta(G)$. (הוכחה במשפטים שצריך לדעת להוכיח)
- <u>הכלת גרף קריטי:</u> כול גרף G שמקיים $\chi(G) = k$ מכיל תת גרף k קריטי. וזה ברור כי נתחיל להסיר קשתות וקודקודים מ G עד אשר כול קשת/קודקוד שנסיר תהפוך אותו ל $k-1$ צביע ואז קיבלנו גרף קריטי.
- <u>תכונות של גרף k קריטי:</u>
  - לכול $v \in V$ ולכול $k-1$ צביעה של $G \backslash v$ מתקיים ששכניו של v מקבלים את כול $k-1$ הצבעים. כי אחרת היינו יכולים להרחיב את הצביעה לצביעה חוקית על G כולו ב $k-1$ צבעים.
  - לכול צלע $(u,v) \in E$ מתקיים כי לכול $k-1$ צביעה של $G \backslash e$ אז הצבע של u ושל v זהה, אחרת יכולנו להוסיף חזרה את הקשת ולקבל $k-1$ צביעה לגרף כולו.
  - מתקיים כי $\delta(G) \geq k-1$ כי אם היה קודקוד מדרגה נמוכה יותר, היינו מוציאים אותו מקבלים $k-1$ צביעה, מחזירים אותו ובהכרח היה צבע שאפשר היה לצבוע אותו כי יש לו פחות שכנים מצבעים חוקיים, בסתירה לכך שמספר הצביעה של הגרף הוא k. לכן בפרט $|E| \geq \frac{k-1}{2}|V|$ מסכימה פשוטה של הדרגות.
  - אם $k \geq 3$ אז $\kappa(G) \geq 2$. נניח בשלילה ש $\kappa(G) = 0$ אז הגרף לא קשיר ולכן יש $V_1 \cup V_2 = V$ שתיהן לא טריוויאליות כך שאין קשתות בינהן. לכן אפשר לצבוע כול אחת בנפרד ב $k-1$ צבעים ולאחד לצביעה אחת לגרף כולו ב $k-1$ צבעים בסתירה. אם $\kappa(G) = 1$ אז שוב יש פירוק ל V_1, V_2 אבל הפעם יש קודקוד משותף. נצבע את V_1 ב$k-1$ צבעים וגם את V_2 ב $k-1$ צבעים ועל ידי פרמוטציה נדאג שהם יזדהו על גבי הקודקוד המשותף, מעבר לכך אין שום קשתות שמפריעות לצביעה ולכן ההדבקה של הצביעות היא צביעה חוקית ב $k-1$ צבעים בסתירה. לכן $\kappa(G) \geq 2$.
  - בגרף k קריטי מתקיים $\kappa'(G) \geq k-1$ (הוכחה במשפטים שלא צריך לדעת להוכיח)
- <u>משפט ארדש:</u> לכול k, l טבעיים קיים גרף G שהוא לא מכיל אף מעגל מאורך l או קצר יותר ובכול זאת $\chi(G) \geq k$. (הוכחה במשפטים שלא צריך לדעת להוכיח)

<u>***צביעה קשתית***</u>

הגדרות:

- <u>צביעה קשתית:</u> עבור גרף G נטול לולאות נגדיר k צביעה קשתית להיות פונקציה $f: E \rightarrow [k]$ כך שלכול קשת היא מתאימה צבע.
- <u>צביעה חוקית:</u> נאמר שצביעה $f: E \rightarrow [k]$ היא חוקית אם כול זוג קשתות שחולקות קודקוד הן בעלות צבעים שונים. זה שקול לכך שנדרוש שכול קבוצת צבע של קשתות היא זיווג, כלומר אוסף של קשתות זרות בקודקודים. לכן צביעה קשתית זה חלוקה של קשתות הגרף לזיווגים זרים.
- <u>אינדקס כרומטי:</u> עבור גרף G נסמן $\chi'(G)$ את האינדקס הכרומטי שלו להיות המספר k הקטן ביותר עבורו הגרף k צביע קשתית. נשים לב כי $\chi'(G) = \chi\big(L(G)\big)$ כלומר צביעה של הקשתות שקולה לצביעה קודקודית של גרף הקשתות.
- <u>טיב של צביעה:</u> לכול צביעה $C: E \rightarrow [k]$ לאו דווקא חוקית נסמן עבור $v \in V$ את מספר הצבעים השונים של קשתות שחלות ב v על ידי $C[v]$. נאמר שצביעה C' היא שיפור של C אם מתקיים $\sum_{v \in V} C'[v] > \sum_{v \in V} C[v]$ כלומר הקודקודים נוגעים ביותר צבעים שונים.
- <u>צביעה אופטימלית:</u> צביעה תקרא אופטימלית אם לא קיים לה שיפור באותו מספר צבעים.

טענות:

- <u>חסם טריוויאלי:</u> נשים לב כי $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ כי עבור הקודקוד שדרגתו Δ יש לו Δ קשתות שחולקות קודקוד עליו, ולכן כולן יצטרכו להיצבע בצבעים שונים, בפרט יש לפחות Δ צבעים.
- <u>שתיים צביעה שנוגעת בכולם:</u> לכול גרף G קשיר שאינו מעגל אי זוגי קיימת 2 צביעה לקשתות (לא בהכרח חוקית...) כך שבכול צומת מדרגה לפחות 2 יופיעו שני הצבעים. אם G אוילריאני ומכיל קודקוד v כך ש $d(v) \geq 4$ אז נתחיל מ v ונלך לאורך מעגל האוילר כאשר אנחנו צובעים את הקשתות לסירוגין. בכול קודקוד בגרף נכנסו ויצאנו ממנו ולכן שני הצבעים נוגעים בו, אולי למעט v שיכול להיות שהתחלנו וסיימנו באותו הצבע, אבל דרשנו $d(v) \geq 4$ ולכן בהכרח עברנו דרכו מתישהו במהלך המעגל ולכן גם הוא נוגע בכול הצבעים. אם G אוילריאני ואין קודקוד מדרגה יותר מ 4 אז G הוא פשוט מעגל, ומההנחה הוא מעגל זוגי ולכן בבירור יש 2 צביעה קשתית כנדרש. אם G לא אוילריאני אז נוסיף קודקוד x ונחבר אותו בקשת לכול הקודקודים מדרגה אי זוגית, כעת הגרף אוילריאני ולכן נצבע לסירוגין את הקשתות שהפעם נתחיל ונסיים ב x ולכן כול קודקוד שדרגתו המקורית הייתה לפחות 2 אז במעגל האוילר עוברים דרכו מקשתות שלא מגיעות מ x ולכן גם לאחר סילוק x הוא יגע בשני הצבעים כנדרש.
- <u>תכונה של צביעה אופטימלית:</u> עבור גרף G ו k צביעה C שהיא אופטימלית אם קיים צומת v כך שהצבע i_1 לא מופיע בה והצבע i_2 מופיע פעמיים לפחות אז רכיב הקשירות של הצומת v בגרף שמכיל את הקשתות שצבועות בצבעים i_1 וi_2 הוא מעגל אי זוגי.
ההוכחה פשוטה מהטענה לעיל, כי אם זה לא היה מעגל אי זוגי היה אפשר לצבוע רק את הרכיב הזה מחדש בצבעים i_1, i_2 כך שכול צומת שדרגתו לפחות 2 (בפרט הצומת v) יגע בשני הצבעים, ובפרט אם נצבע כך את הגרף כולו מבלי לשנות שום דבר אחר אז קיבלנו שיפור לצביעה המקורית בסתירה, כי מספר הצבעים שקודקוד v נוגע בהם עלה באחד ושום דבר אחר לא ירד.
- <u>צביעה קשתית בגרף דו צדדי:</u> בגרף דו צדדי מתקיים $\chi'(G) = \Delta(G)$ (הוכחה במשפטים שצריך לדעת להוכיח)
- <u>משפט *Vizing*:</u> לכול גרף **פשוט** G מתקיים $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. (הוכחה במשפטים שצריך לדעת להוכיח)
- <u>משפט ראמזי:</u> לכול שני מספרים טבעיים $k, l \in N$ קיים r גדול מספיק כך שלכול גרף על לפחות r קודקודים יש תת גרף שהוא קליקה בגודל k או קבוצה בלתי תלויה בגודל l (או שניהם). נסמן $r_{k,l}$ להיות מספר רמזי עבור k, l להיות ה r הנ"ל הקטן ביותר. באופן שקול המשפט אומר שלכול צביעת קשתות הגרף בשני צבעים אדום וכחול יש או קליקה בגודל k שכולה צבועה באדום או קליקה בגודל l שכולה צבועה בכחול. (הוכחה במשפטים שצריך לדעת להוכיח)
- <u>חסם עליון למספרי ראמזי:</u> מתקיים $r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$ ומוכיחים את זה באינדוקציה פשוטה, בעזרת הלמה של ארדש שקרש ותכונת פסקל של המקדם הבינומי.
- ***<u>להשלים הגדרות על מספרי ראמזי מוכללים ושימוש למספרי ראמזי ושוויון בלמה של ארדש שקרש</u>***
- <u>חסם תחתון למספרי רמזי:</u> עבור $r(k,k)$ אם מתקיים $\binom{n}{2} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ אז $n < r(k,k)$. (הוכחה במשפטים שצריך לדעת להוכיח)

תורת הגרפים האקסטרימלית

הגדרות:

- <u>גרף m צדדי שלם:</u> גרף $G=(V,E)$ נקרא m צדדי שלם אם אפשר לחלק את קודקודיו ל m קבוצות זרות $V=V_1\cup\ldots\cup V_m$ כך שלכול $u\in V_i$ ולכול $v\in V_j$ הקשת $(u,v)\in E$ ואין אף קשתות אחרות בגרף. (יכול להיות ש $V_i=\phi$ עבור i כלשהו)
- <u>שליטה בדרגות:</u> עבור שני גרפים $G=(V,E),H=(V',E')$ כך ש $|V|=|V'|=n$ נאמר ש G שולט בדרגות על H אם לאחר שממינו את דרגות G ודרגות H אז דרגות G גדולות שווה לדרגות H לאורך כול המערך הממוין.
- <u>$Join$ של גרפים:</u> עבור שני גרפים G,H נגדיר את ה $Join$ שלהם להיות $G+H$ כך שזה גרף שמתקבל מאיחוד זר בצמתים של G,H וחיבור כול צומת של G בקשת לכול צומת של H.
- <u>גרף טורן:</u> עבור $n\geq m\geq 1$ נגדיר את הגרף $T_{n,m}$ להיות גרף טורן והוא הגרף ה m צדדי השלם על n צמתים כך שהצדדים הם כמה שיותר מאוזנים, כלומר הגודל של כול צד הוא $\frac{n}{m}$ ערך שלם עליון או ערך שלם תחון. באופן יותר ספציפי $|V_i|=\left\lfloor\frac{n+i-1}{m}\right\rfloor$

טענות:

- <u>משפט טורן:</u> עבור גרף פשוט $G=(V,E)$ על n צמתים שלא מכיל K_{m+1} כתת גרף אז $|E|\leq|E(T_{n,m})|$ ושוויון אם ורק אם G איזומורפי ל $T_{n,m}$.
    - <u>למה 1:</u> גרף פשוט שלא מכיל את K_{m+1} נשלט בדרגות על ידי גרף m צדדי שלם על אותה קבוצה של קודקודים.
    - <u>למה 2:</u> אם גרף הוא m צדד שלם על n קודקודים אז מספר הקשתות שלו קטן או שווה מזה של $T_{n,m}$ ושוויון אם ורק אם הוא איזומורפי ל $T_{n,m}$

הוכחת המשפט פלוס הלמות בחלק של משפטים שצריך לדעת להוכיח.

גרפים מישוריים

הגדרות:

<u>גרף מישורי:</u> גרף שניתן לשכן אותו במישור (כלומר לצייר אותו על דף) מבלי שקשתות תחתכנה מלבד בנקודות חיבור שהם הקודקודים.

<u>גרף במישור:</u> שיכון של גרף כלשהו כציור במישור. אפשר לשכן גרפיים לא מישוריים גם במישור ולקבל קשתות נחתכות, אבל אפשר גם לקחת גרף מישורי ולשכן אותו בצורה שונה וגם לקבל קשתות נחתכות למרות שיש שיכון אחר שבו הקשתות לא נחתכות.

<u>פאה:</u> פאה של גרף במישור G היא רכיב קשירות של המישור לאחר שהוצאנו מהמישור את G. כמו כן יש פאה חיצונית, שהיא רכיב הקשירות של אינסוף, ומההטלה הסטראוגרפית אפשר לקבל שכול קודקוד יכול להיות על השפה של הפאה של אינסוף. נשים לב שהפאות תלויות באיך שיכננו את הגרף במישור.

<u>גרף דואלי:</u> עבור גרף במישור G נגדיר גרף דואלי G^* כאשר לכול פאה f של G יש קודקוד ב G^* וזוג צמתים ב G^* מחוברים בקשת אם יש קשת משותפת לשפות הפאות שהם מייצגים ב G. נשים לב שגשר בגרף G יתאים ללולאה ב G^* כי הגשר יספר כקשת משותפת של הפאה החיצונית עם עצמה.

טענות:

<u>הטלה סטאוגרפית:</u> מראה לנו שגרף ניתן לשיכון במישור אם ורק אם הוא ניתן לשיכון בספירה

<u>שיכון בטורוס:</u> את הטורוס אפשר לזהות עם ריבוע שצלעותיו "דבוקות" אחת לשנייה בסיבוב. ואז קל לראות שאת K_5 אפשר לשכן בטורוס.

<u>נוסחת אוילר:</u> לכול גרף קשיר במישור $G=(V,E)$ ו ϕ פאות מתקיים $|V|-|E|+\phi=2$. (הוכחה במשפטים שצריך לדעת להוכיח)

- לכול השיכונים במישור של אותו הגרף יש אותו מספר פאות, זה נובע מיידית מנוסחת אוילר.

<u>משפטים שצריך לדעת להוכיח:</u>

<u>גרף הוא דו צדדי אם ורק אם אין בו מעגלים אי זוגיים:</u>

<u>$\Leftarrow$</u>אם גרף הוא דו צדדי אז ניתן לחלק את קודקודיו לשתי קבוצות זרות A,B כך שכול קשת היא מA ל B. נניח בשלילה שיש מעגל אי זוגי $C=(v_1,\dots,v_{2n})$. בה"כ $v_1\in A$ אז משום שהקשת (v_1,v_2) בגרף אז $v_2\in B$ ולכן $v_3\in A$ וכך הלאה נקבל כי כול הקודקודים מהצורה $v_{2k+1}\in A$ בעוד ש $v_{2k}\in B$ ולכן קיבלנו כי $v_{2n}\in B$ אבל $v_{2n}=v_1$ וזו סתירה לכך ש $A\cap B=\phi$ לכן אין מעגל אי זוגי.

<u>***:$\Rightarrow$***</u> תחילה נשים לב שאפשר להניח בה"כ שהגרף קשיר, אחרת נוכיח עבור כול רכיב קשירות בנפרד ונחבר. אם גרף $G=<V,E>$ מקיים שאין בו מעגלים אי זוגיים אז נבחר קודקוד $v\in V$ כלשהו ונחלק את קודקודי הגרף לשתי קבוצות A,B כך ש A הם הקודקודים שהמרחק הקצר ביותר מהם לv הוא זוגי, והקבוצה B כנ"ל רק עבור אי זוגי. בבירור $A\cap B=\phi$. כעת נראה שאין קשתות בתוך A ובתוך B. נניח בשלילה שהייתה קשת (α,β) כך שגם $\alpha\in A$ וגם $\beta\in A$ אז בבירור שני הקודקודים חייבים להיות באותו המרחק מ v אחרת אחד היה צריך להיות רחוק בלפחות 2 קשתות יותר מהשני, אבל יש קשת ביניהם. לכן נסמן P_1,P_2 המסלולים הקצרים ביותר מ α,β לקודקוד v בהתאמה, ונסמן ב ξ את נקודת החיתוך הראשונה שלהם, בהכרח יש אחת כזו כי הם נחתכים בקודקוד v. אזי בהכרח המסלול מ α ל ξ שווה באורכו למסלול מ β ל ξ כי ξ על המסלול הקצר ביותר, והם בעלי אותו מרחק מ v. לכן המסלול $u\to\xi\to v\to u$ הוא מעגל באורך אי זוגי בסתירה.

<u>משפט קיילי לעצים פורשים:</u>

יהי $n\geq 2$, נסמן ב t_n את מספר העצים על הקודקודים $\{1,\dots,n\}$ אז $t_n=n^{n-2}$.

נתבונן ב T_n שהיא קבוצת כול השלשות (T,L,R) כאשר T עץ על $[n]$ ו $L,R\in[n]$. בבירור $|T_n|=n^2t_n$. לכן מספיק שנראה כי $|T_n|=n^n$ ואת זה נראה על ידי פונקציה חד חד ערכית ועל מ T_n אל כול הפונקציות $\{f\ |f:[n]\to[n]\}$.

בהנתן פונקציה $f:[n]\to[n]$ נגדיר G_f להיות גרף הפונקציה (מכוון!) שקודקודיו הם $[n]$ והקשתות שלו הן $(i,f(i))$ לכול $i\in[n]$. משום ש f חד ערכית אז דרגת היציאה של כול קודקוד היא בדיוק אחד, לכן יש בדיוק n קשתות. בכול רכיב קשירות של G_f יש אותו מספר קשתות כמו קודקודים כי כול קודקוד תורם קשת אחת, ולכן בכול רכיב קשירות יש בדיוק מעגל אחד והוא מעגל מכוון.

נסמן ב M את הוקדקודים שמרכיבים את המעגלים של f בכול רכיבי הקשירות יחד, ברור כי f מצומצמת רק על M היא פונקציה חד חד ערכית ועל כי היא מורכבת מאיחוד זר של מעגלים. וכול שאר הקשתות מכוונות לכיוון המעגל ברכיב הקשירות שלהן.

נמיין את קודקודי M לפי הסדר הטבעי ונקבל $v_1 < \cdots < v_k$ ונקבל ש f מצומצמת על M היא תמורה. נסמן $L = f(v_1), R = f(v_n)$. כעת נסיר מ G_f את כול הקשתות של המעגלים ונחליף אותן במסלול $P = f(v_1)f(v_2), \dots, f(v_k)$. כלומר P מסלול מ L אל R, ונשאיר את כול הקשתות האחרות. נשים לב שהגרף שקיבלנו הוא אכן עץ כי בבירור הוא קשיר ויש לו בדיוק $n-1$ קשתות כי יש בו $(k-1)+(n-k)$ קשתות, ולכן הוא עץ.

לכן תארנו לעיל אלגוריתם שלוקח פונקציה $f:[n] \to [n]$ ומייצר ממנה שלשה (T, L, R). ההתאמה הזו היא חד חד ערכית כי L, R נקבעים ביחידות לפי האיבר הגדול ביותר והקטן ביותר מבין איברי הפונקציה ששייכים למעגל, ושאר העץ נקבע ביחידות על ידי ערכי הפונקציה.

נותר להראות שההתאמה לעיל היא על, ואכן בהנתן (T, R, L) נרצה לשחזר את הפונקציה, נעשה זאת על ידי התבוננות במסלול היחיד בין L ל R. יש רק אחד כזה ב T כי הוא עץ. איברי המסלול הנ"ל הם האיברים שנמצאים במעגלי f. בזכות המסלול יש לנו את הסדר של השורה התחתונה בתמורה שמייצגת את f ולאחר מיון נקבל השורה העליונה. אז הצלחנו לשחזר את מעגלי f, והאיברים שאינם במעגל נתונים על ידי שאר T.

לכן יש התאמת חד חד ערכית ועל בין T_n לבין n^n ולכן קיבלנו הנדרש.

<u>משפט Mader לקשירות קודקודית:</u>

יהי $k \in N$ וגרף $G =< V, E >$ כך שהדרגה הממוצעת של G היא $4k$ לפחות אז יש ל G תת גרף G^* שהוא k קשיר קודקודית.

נשים לב שעבור $k = 0$ זה ברור כי כול גרף הוא אפס קשיר, ועבור $k = 1$ אז יש לפחות קשת אחת כי הדרגה הממוצעת אינה אפס, לכן הקשת הזו היא תת גרף 1 קשיר. לכן מעתה נניח $k \geq 2$. נשים לב כי הדרישה $\bar{d}(G) \geq 4k$ גוררת כי קיים לפחות קודקוד אחד מדרגה לפחות $4k$ ולכן $|V(G)| \geq 4k$ ובפרט $|V(G)| \geq 2k-1$. כמו כן $|E(G)| \geq 2k|V(G)|$ כי סכום הדרגות זה פעמיים מספר הקשתות בגרף וידוע כי $\frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V(G)|} \geq 4k$. ובפרט נקבל כי $|E(G)| \geq (2k-3)(|V(G)|-k+1)+1$ עבור $k \geq 2$. לכן מספיק להוכיח שגרף המקיים תכונות אלה מכיל תת גרף k קשיר.

נוכיח באינדוקציה על $|V(G)|$ שגרף המקיים שתי התכונות לעיל מכיל תת גרף k קשיר. ואכן עבור $|V(G)| = 2k-1$ מקרה הבסיס שלנו (לא יכול להיות פחות) יתקיים

$|E(G)| \geq (2k-3)$

ולכן קיבלנו שזה הגרף המלא על $2k-1$ קודקודים ובפרט הוא $2k-2$ ו $k \geq 2$ ולכן הוא k קשיר כנדרש.

נניח באינדוקציה עבור כול הגרפים כך ש $n > |V(G)| \geq 2k-1$ ונוכיח עבור n. אזי יהי גרף $G =< V, E >$ כך ש $|V(G)| = n$. אם ב G קיים קודקוד $v \in V$ כך ש $d(v) \leq 2k-3$ אז הגרף $G\backslash v$ הוא גרף על $n-1$ קודקודים כך ש $|E(G\backslash v)| = |E(G)| - (2k-3)$ ולכן מאלגברה פשוטה $|E(G\backslash v)| \geq (2k-3)(n-1-k+1)+1$ ולכן $G\backslash v$ מקיים התנאים והוא קטן יותר ממש מהגרף G ולכן מהנחת האינדוקציה יש לו תת גרף k קשיר ובפרט ל G יש תת גרף כזה.

לכן נניח שלכול $v \in V$ מתקיים $d(v) \geq 2k-2$, אם G עצמו k קשיר אז סיימנו לכן נניח כי G אינו k קשיר ולכן הוא לכול היותר $k-1$ קשיר ולכן קיימת קבוצה $S \subseteq V$ כך ש $|S| = k-1$ שהיא מהווה חתך קודקודי בגרף. לאחר הוצאת S מהגרף הוא מתפרק לפחות לשני רכיבי קשירות זרים. נסמן אותם V_1, V_2 כך ש $V_1 \cup V_2 = V$ וגם $V_1 \cap V_2 = S$. כמו כן הן לא קבוצות טריוויאליות, כלומר גם ב V_1

וגם ב V_2 יש עוד קודקודים מלבד קודקודי S. וכמו כן אין קשתות בין $V_1\setminus S$ ל $V_2\setminus S$ כלומר הם לא קשירים.

לכן יהי $v \in V_1\setminus S$ אזי כול קשתותיו הולכות לתוך V_1. מההנחה דרגתו היא לפחות $2k-2$ ולכן $|V_1|$ הוא לפחות $2k-2$ כי הגרף פשוט. כנ"ל עבור V_2 ולכן $|V_1|,|V_2| \geq 2k-1$. נסמן $G_2 = G(V_1)$ ו $G_1 = G(V_1)$ הגרפים הנפרשים. אם אחד מתקיים כי $|E(G_1)| \geq (2k-3)(|V_1|-k+1)+1$ אז מהנחת האינדוקציה הוא מקיים את שני התנאים ולכן יש בו תת גרף k קשיר כנדרש, כנ"ל עבור G_2 לכן אפשר להניח שעבור שנייהם כמות הקשתות קטנה מהכמות הזו.

נשים לב כי $E(G) = E(G_1 \cup G_2)$ כי אין קשתות בין $V_1\setminus S$ לבין $V_2\setminus S$ וקשתות S עצמו מופיעות הן ב G_1 והן ב G_2. לכן $|E(G)| \leq |E(G_1)| + |E(G_2)|$ אבל מההנחה על חסם על כמות הקשתות שבהם נקבל מאלגברה פשוטה כי $|E(G)| \leq (2k-3)-k+1$ וזו סתירה להנחה על G. (משתמשים בעובדה ש $(|V_1|+|V_2| = |V|-(k-1)$)

גרף קשיר אוילריאני אם ורק אם וכול הדרגות זוגיות

$\leftarrow$ נניח כי בגרף G קיים מעגל אוילר שנסמן ב W. משום שW עובר בכול קשת בדיוק פעם אחת ניתן לכוון את קשתות הגרף כך שW כעת יהיה הילוך סגור מכוון. משום ש W סגור מספר הקשתות שנכנסות לכול קודקוד שווה למספר הקשתות שיוצאות ממנו. כמו כן אין צלעות נוספות בגרף ולכן הדרגה של כול קודקוד זה סכום דרגת הכניסה ודרגת היציאה, אבל הן שוות ולכן זה פעמיים דרגת הכניסה ובפרט מספר זוגי.

$\rightarrow$ נניח כי בגרף G מתקיים שכול הדרגות זוגיות וכמו כן הגרף קשיר. יהי P ההילוך הארוך ביותר שעובר בכול קשת לכול היותר פעם אחת. נשים לב שההילוך חייב להיות סגור, כי אחרת עבור קודקוד הקצה דרגתו בהילוך היא אי זוגית, לכן קיימת לו לפחות עוד קשת אחת שאינה בהילוך ולכן נוכל להאריך את ההילוך בסתירה למקסימליות שלו. לכן זה בהכרח הילוך סגור, נראה שהוא חייב להכיל את כול הקשתות. ואכן אם יש קשת שאינה במסלול משום שהגרף קשיר חייבת להיות קשת כלשהי e שקצה האחד שלה על P והקצה השני לא, לכן ההילוך שמתחיל מהקצה המרוחק של e ואז הולך לאורך P הוא ארוך יותר מ P בסתירה למקסימליות של P. לכן P מעגל המכיל את כול הצלעות בדיוק פעם אחת ולכן מעגל אוילר.

משפט Dirac – תנאי מספיק לגרף המילטוני

עבור גרף $G = (V,E)$ כך ש $|V| = n$ אזי אם $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ אז בG יש מעגל המילטון. $(n \geq 3)$.

נניח בשלילה שקיים גרף G_0 שמקיים $\delta(G_0) \geq \frac{n}{2}$ אבל הוא לא המילטוני. נהפוך את G_0 לדוגמא נגדית מקסימלית ביחס להכלה, כלומר נוסיף קשתות ל G_0 כול עוד ההוספה לא תהפוך אותו להמילטוני, ובסוף נקבל גרף שכול קשת שנוסיף לו תהפוך אותו להמילטוני. נשים לב שהגרף שקיבלנו אינו הגרף השלם כי הגרף השלם המילטוני ולכן חסרות בו קשתות, וכול תוספת של קשת חסרה הופכת אותו להמילטוני. נסמן הדוגמא המקסימלית ב G.

תהי e קשת שחסרה בגרף G, אז ב $G \cup e$ יש מעגל המילטון C ולכן ב G קיים מסלול המילטון שהוא C פחות הקשת. נסמן המסלול $P = (v_1, \dots, v_n)$. משום שכול קודקודי הגרף G נמצאים ב P אז כול שכני v_1, v_n גם כן ב P. נתבונן בקבוצת כול הקודקודים שיש קשת מהם אל v_n ונסמן אותה $I_1 = \{1 \leq i \leq n-1 \,|(v_i, v_n) \in E\}$ כמו כן נתבונן בקבוצת כול הקודקודים שהשכן הבא שלהם במעגל יש קשת אליו מ v_1 כלומר $I_2 = \{1 \leq i \leq n-1 \,|(v_1, v_{i+1}) \in E\}$. אזי מתקיים כי שתי הקבוצות מקיימות $I_1, I_2 \subseteq [n-1]$ אבל כול אחת בגודל לפחות $\frac{n}{2}$ כי דרגת קודקודי הקצה היא לפחות הדרגה המינמלית שהיא $\frac{n}{2}$. לכן משובך היונים יש קודקוד v_i שגם יש קשת ממנו ל v_n וגם מ v_1 לשכן הבא אחריו במעגל. לכן יש מעגל המילטוני בגרף והוא להתחיל מ v_1 וללכת אל עבר v_i, ב

v_i לקפוץ ל v_n ומשם ללכת אחורה עד לשכן של v_i ומשם לקפוץ חזרה ל v_1 ולכן קיבלנו מעגל המילטון כנדרש.

משפט Chavatal – Erdos תנאי מספיק להמילטוניות

עבור גרף $G=(V,E)$ על לפחות שלושה קודקודים כך ש $\kappa(G)\geq\alpha(G)$ כלומר הקשירות הקודקודית גדולה מהגודל המקסימלי של קבוצה בלתי תלויה, אז הגרף המילטוני.

נשים לב כי אם $\kappa(G)=1$ אז $\alpha(G)=1$ ולכן זו למעשה קליקה, בסתירה לכך ש $\kappa(G)=1$ ולכן זה לא יתכן. לכן נניח $\kappa(G)\geq 2$.

ראינו כבר כי מתקיים $\kappa(G)\leq\delta(G)$ ולכן משום שיש מעגל בגרף באורך לפחות $\delta(G)+1$ יש מעגל באורך לפחות $\kappa(G)+1$. נסמן ב C את המעגל הארוך ביותר בגרף ונראה שהוא המילטוני כנדרש. נניח בשלילה ש C אינו המילטוני, כלומר ב $G\backslash C$ יש עוד קודקודים. יהי H רכיב קשירות של הגרף שנפרש מקודקודי $G\backslash C$. משום ש G הוא $\kappa(G)$ קשיר קודקודית ומשום שב C יש לפחות $\kappa(G)+1$ קודקודים אז יש $\kappa(G)$ קודקודים ב C שהם שכנים של קודקוד ב H כי אחרת אם היו פחות מ $\kappa(G)$ כאלה היינו יכולים להסיר את כולם ולקבל גרף לא קשיר, כי בבירור ל H אין קשתות לאף רכיב קשירות אחר פרט ל C. לכן נסמן ב $v_1,\dots,v_k$ את $\kappa(G)$ הקודקודים שנמצאים על C ויש להם שכן ב H. כמו כן נסמן ב $u_1,\dots,u_k$ את השכנים שלהם במעגל (לפי הסדר).

כעת יהי $w\in H$ קודקוד כלשהו, מהנחת השלילה קיים כזה, וכעת נראה כי $u_1,\dots,u_k,w$ קבוצה בלתי תלויה ומשום ש $u_i\neq u_j$ כי $v_i\neq v_j$ נקבל כי זו קבוצה בגודל $\kappa(G)+1$ בסתירה לנתוני המשפט. ואכן תחילה נראה שאין קשת u_i,u_j. נניח בשלילה שיש קשת (u_i,u_j) כלשהי אזי נתבונן במעגל הבא $v_i\to u_j\to u_i\to v_j\to H\to v_i$ כלומר מתחילים מ v_i והולכים על C בכיוון ההפוך מ u_i עד שמגיעים ל u_j, משם קופצים ל u_i מההנחה שקיימת הקשת, ומשם ל v_j ומשם ל H כי אנחנו יודעים ש v_j מחובר ל H, בתוך H הולכים לקודקוד שמחובר ל v_i וזה אפשרי מהקשירות של H ומשם חוזרים ל v_i. בבירור קיבלנו מעגל ארוך יותר בסתירה למקסימליות של C.

נניח בשלילה שיש קשת (u_i,w) עבור i כלשהו. אזי נתחיל מ v_i נלך לאורך C ביכוון ההפוך מ u_i עד שנגיע ל u_i, משם נלך ל w בקשת שהנחנו שקיימת. בתוך H נזוז עד שנגיע לקודקוד שמחובר ל v_i שזה בוודאות אפשרי מקשירות H, ואז נסגור מעגל שהוא ארוך יותר מ C בבירור, בסתירה למקסימליות של C.

לכן ב $G\backslash C$ אין קודקודים ולכן C המילטוני כדנרש.

משפט הול לזיווג בגרף דו צדדי

עבור גרף $G=(A\cup B,E)$ דו צדדי אז קיים זיווג המרווה את A אם ורק אם לכול תת קבוצה של A מספר השכנים שלה גדול שווה למספר האיברים בה.

$\Leftarrow$ הכיוון הפשוט, אם קיים זיווג M המרווה את צד A אז לכול תת קבוצה $X\subseteq A$ מתקיים שלכול איבר $x\in X$ יש שכן אחד בדיוק ב M והשכנים הללו שונים, ולכן בפרט לקבוצה X יש לפחות X שכנים שונים, אחד לכול חבר בה, ולכן $|N_G(X)|\geq|X|$ כנדרש.

$\Rightarrow$ נניח שתנאי הול מתקיים לצד A ונוכיח שקיים זיווג מרווה את A. נוכיח באינדוקציה על $|A|$. עבור $|A|=1$ אז מתקיים כי יש קודקוד בודד ב $|A|$ ומההנחה יש לו לפחות שכן אחד ולכן אפשר למצוא לו זיווג, שזה למעשה קשת בודדת.

נניח לכול $k\leq n-1$ ונוכיח עבור n. נפריד למקרים, אם לכול $\phi\neq X\subseteq A$ (אבל לא שווה ל A) מתקיים כי $|N_G(X)|>|X|$ אז נבחר קודקוד כלשהו $a\in A$ ושכן כלשהו שלו $b\in B$ שבהכרח קיים כי

תנאי הול מתקיים גם לסינגלטון $\{a\}$. אזי בגרף $G\setminus\{a,b\}$ עדיין מתקיים תנאי הול כי לכול קבוצה $X\subseteq A$ הקטנו את כמות השכנים שלה בלכול היותר אחד והנחנו שהיה אי שוויון חזק בתנאי הול לכול הקבוצות (ועבור A עצמה גם הקטנו את גודלה באחד). לכן מהנחת האינדוקציה בגרף $G\setminus\{a,b\}$ יש זיווג המרווה את כול קודקודי צד A, נסמן אותו M. בבירור הקודקודים a,b לא שייכים לאף קשת ב M ולכן $M\cup(a,b)$ זה גם זיווג והוא מרווה את A.

אם קיימת $\phi\neq X_0\subseteq A$ (וההכלה היא ממש!) כך ש $|N_G(X)|=|X|$ אז נתבונן בשני תתי גרפים של G, נגדיר מצד אחד $G_1=G\big(X_0\cup N_G(X_0)\big)$ ומצד שני $G_2=G\big(A\setminus X_0\cup B\setminus N_G(X_0)\big)$ כלומר הגרף שנפרש מ X_0 ושכניו, והגרף שנפרש מהסרת X_0 וכול שכניו. קל לראות כי תנאי הול מתקיים עבור G_1 כי לקחנו את כול שכניו של X_0 ולכן גם לכול תת קבוצה כול שכנייה יהיו בגרף, ולכן משום שתנאי הול מתקיים ב G הוא יתקיים גם ב G_1 ולכן מהנחת האינדוקציה יש זיווג המרווה את צד A בגרף G_1. (משום ש X_0 היא ל A כולה אז הגרף קטן יותר ממש). נסמן ב M_1 את הזיווג הנ"ל.

עבור הגרף G_2 מתקיים כי לכול $S\subseteq A\setminus X_0$ מתקיים כי $N_G(X_0\cup S)=N_G(X_0)\cup N_G(S)$ ולכן $N_G(X_0\cup S)=N_G(X_0)\cup\big(N_G(S)\setminus N_G(X_0)\big)=\mathrm{N}_G(X_0)\uplus N_{G_2}(S)$ ולכן משום שתנאי הול מתקיים לגרף G נקבל $|X_0|+|S|\leq|N_G(X_0\cup S)|=|N_G(X_0)|+\left|N_{G_2}(S)\right|$ אבל מההנחה על $|N_G(X_0)|=|X_0|$ ולכן $|S|\leq\left|N_{G_2}(S)\right|$ ולכן הול מתקיים גם על G_2 ולכן יש שם זיווג M_2 מהנחת האינדוקציה, ולכן $M_1\cup M_2$ זיווג המרווה את A בגרף כולו.

<u>משפט קניג לקשר בין זיווג לכיסוי בגרף דו צדדי:</u>

עבור $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי מתקיים כי גודל הכיסוי הקודקודי המינימלי בגרף הוא כגודל הזיווג המקסימלי, כלומר $\tau(G)=\mu(G)$.

ראינו כבר בעבר כי לכול גרף $\mu(G)\leq\tau(G)$ כלומר גודל הכיסוי המינמלי הוא לפחות כגודל הזיווג המקסימלי. נראה שבגרף דו צדדי מתקיים $\tau(G)\leq\mu(G)$.

ואכן יהי כיסוי $T\subseteq\mathrm{V}$ בגודל המינימלי כלומר $|T|=\tau(G)$, נראה שיש זיווג בגרף בגודל $|T|$ ובפרט הזיווג המקסימלי לפחות גדול יותר (אבל שווה..). נגדיר $T_1=T\cap A$ ו $T_2=T\cap B$ כעת נגדיר שני תתי גרפים $\mathrm{G}_1=G\big(T_1\cup(B\setminus T_2)\big)$ וגם $G_2=G\big((A\setminus T_1)\cup T_2\big)$. אזי שני הגרפים הללו זרים בקודקודים, לכן אם נראה זיווג המרווה את T_1 ב G_1 וזיווג המרווה את T_2 ב G_2 האיחוד שלהם יהיה גם כן זיווג וגודלו יהיה T כנדרש. לכן נראה תנאי הול לכול אחד מהם בנפרד.

תהי $S\subseteq T_1$ תת קבוצה כלשהי. נשים לב כי $(T_1\setminus S)\cup\big(N_{G_1}(S)\cup T_2\big)$ הוא כיסוי קודקודי ל G, כי $T_1\cup T_2$ הוא כיסוי קודקודי, ועבור קודקודי S שהסרנו מ T_1 כול הקשתות שנוגעות בהם הולכות או לT_2 או לשכן אחר שיהיה ב $N_{G_1}(S)$. ולכן משום ש T כיסוי מינמלי נקבל כי הגודל של הקבוצה הנל הוא לא פחות מ T. ומתקיים $|\mathrm{T}|\leq|T_2|+\left|N_{G_1}(S)\right|+|S|-|T_1|=\left|(T_1\setminus S)\cup\big(N_{G_1}(S)\cup T_2\big)\right|$ אבל $|T|=|T_1|+|T_2|$ ולכן מהעברת אגפים נקבל את תנאי הול ולכן זיווג המרווה את T_1, באופן זהה עבור T_2 נקבל זיווג המרווה את T_2 ולכן כפי שהוסבר למעלה נקבל זיווג בגודל T.

<u>משפט Tutte:</u>

עבור גרף $G=(V,E)$ אז יש בו זיווג מושלם אם ורק אם לכול $S\subseteq V$ מתקיים $o(G\setminus S)\leq|S|$ כאשר $o(G\setminus S)$ זה מספר רכיבי הקשירות מגודל אי זוגי בגרף לאחר הסרת S.

תחילה נשים לב כי אם בגרף מסוים יחס השכנות של קודקודים הוא יחס שקילות אז הגרף הוא איחוד זר בקודקודים של קליקות. ברור שבכול גרף היחס הזה הוא סימטרי ורפלקסיבי, אבל אם הוא גם טרנזטיבי אז זה חייב להיות איחוד זר של קליקות כי נפרק אותו לרכיבי קשירות, בכול רכיב קשירות חייב להיות שבין כול שני קודקודים יש קשת ישירה ולכן זו קליקה.

← נראה שאם בגרף יש זיווג מושלם אז תנאי $tutte$ מתקיים. אזי יהי M זיווג מושלם בגרף G. תהי $S \subseteq V$ קבוצת קודקודים. לכול רכיב קשירות V_i בגרף $G\backslash S$ חייבת להיות קשת אחת שיוצאת החוצה ממנו והיא מוכלת ב M כי לא יכול להיות שקודקודי V_i מזדווגים בינם לבין עצמם כי יש מספר אי זוגי מהם. כול קשת כזו e_i חייבת לקיים שהקצה השני שלה נמצא ב S כי זה רכיבי קשירות שונים, אבל עבור קשתות שונות e_i, e_j הקצוות ב S חייבים להיות שונים כי קשתות בזיווג הן זרות, ולכן לכול רכיב קשירות אי זוגי יש לפחות קודקוד אחד שהוא רק שלו בתוך S ולכן $|S| \geq o(G\backslash S)$ כנדרש.

→נתון גרף G שמקיים את תנאי $tutte$ וצריך להראות זיווג מושלם. נניח בשלילה שקיימת דוגמא נגדית, כלומר קיים גרף G_0 כך שהוא מקיים תנאי $tutte$ אבל אין בו זיווג מושלם. נרצה להפוך אותו לדוגמא נגדית מקסימלית בהכלה, אזי נוסיף לו קשתות עד אשר כול הוספה של קשת נוספת תגרום לכך שיהיה בו זיווג מושלם. נשים לב שהוספה של קשתות לא מפרה את תנאי $tutte$ כי היא רק יכולה להקטין את כמות רכיבי הקשירות שיש בהם כמות אי זוגית של קודקודם על ידי שהקשת החדשה תאחד שניים. לכן נקבל דוגמא נגדית מקסימלית להכלה G כך שאין בו זיווג מושלם אבל הוא כן מקיים את תנאי $tutte$ וכול הוספה של קשת תגרום לכך שיהיה בו זיווג מושלם (נזכר שהקליקה על מספר זוגי של קודקודים מכילה זיווג מושלם, ובגרף יש מספר זוגי כי הוא מקיים $tutte$ על הקבוצה הריקה). נסמן $n = |V(G)|$ ונסמן $U = \{v \in V \ s.t \ d(v) = n - 1\}$. נפריד למקרים

<u>מקרה א:</u> אם $G\backslash U$ הוא איחוד זר של קליקות אז לכול קליקה מגודל זוגי אפשר למצוא זיווג בתוך עצמה, לקליקה אי זוגית אפשר למצוא זיווג בתוך עצמה פרט לקודקוד יחיד שאותו נזווג עם קודקוד מ u משום שהקודקודים ב U מחוברים לכול הקודקודים בגרף, ויש מספיק קודקודים ב U בשביל כול הקליקות האי זוגית כי בפרט U מקיים את תנאי $tutte$. כעת נשארו קודקודים ב U אבל נשים לב שנשארה כמו זוגית של קודקודים כי התחלנו מכמות זוגית, V הוא זוגי, והסרנו קשתות שזה כול פעם להסיר זוג קודקודים, לכן נשאר כמות זוגית ולכן אפשר לזווג אותה בינה לבין עצמה, וסה"כ לקבל זיווג מושלם לכול G.

<u>מקרה ב:</u> הגרף הנפרש על ידי $G\backslash U$ אינו איחוד זר בקודקודים של קליקות, ולכן מהטענה יחס השכנות בגרף $G\backslash U$ אינו יחס טרנזיטיבי לכן קיימים שלושה קודקודים x, y, z כך שהקשתות $(x,y), (y,z)$ קיימות בגרף אבל (x,z) לא קיימת. בנוסף $y \notin U$ ולכן $d(y) < n - 1$, לכן יש קודקוד $w \in V\backslash U$ כך ש $(y,w) \notin E$.

נזכר שהדוגמא הנגדית שלנו מקסימלית להכלה ולכן כול הוספה של קשת תיצור זיווג מושלם, ולכן $G \cup (x,z)$ וגם $G \cup (y,w)$ מכילים זיווגים מושלמים, נסמן M_1, M_2 בהתאמה. לכן מתקיים $(x,z) \in M_1$ כי ללא הקשת הזו אין זיווג וגם $(x,z) \notin M_2$ כי הקשת הזו לא קיימת בגרף שבו M_2 מהווה זיווג, כנ"ל גם $(y,w) \in M_2$ וגם $(y,w) \notin M_1$. ולכן נקבל גם כי הקשתות $(x,y), (y,z)$ שתיהן לא באף זיווג כי זיווג זה קשתות זרות בקודקודים ובזיווג אחד הקודקוד y נמצא ובשני x, z נמצאים.

כעת נוכיח כי $M_1 \Delta M_2 \cup \{(x,y), (y,z)\}$ מכילה זיווג מושלם בגרף שלא מכיל את הקשתות $(y,w), (x,z)$ שהוספנו וזה יהיה זיווג מושלם בגרף G בסתירה להנחה.

נשים לב שכול קודקוד בגרף תחת קבוצת הקשתות $M_1 \Delta M_2$ סמוך או לאפס מהן, או לשתיים, כי גם M_1 וגם M_2 הם זיווגים מושלמים ולכן כול קודקוד סמוך לקשת אחת בדיוק מכול אחד מהם. אם זה שתי קשתות שונות אז שתיהן תופענה ב $M_1 \Delta M_2$ אחרת הן זהות ולכן לא תופענה, כך או כך כול קודקוד סמוך או לאפס או לשתיים. לכן $M_1 \Delta M_2$ על פני קודקודי G הוא אוסף של מעגלים זרים וקודקודים מבודדים. בנוסף אנחנו יודעים כי $M_1 \Delta M_2$ לא ריק כי $(x,z), (y,w)$ נמצאות בו.

כול מעגל C מקשתות $M_1 \Delta M_2$ חייב להיות מורכב מקשתות M_1, M_2 לסירוגין, כי כול אחד מהם זיווג בפרט הקשתות שלו זרות. לכן C מעגל זוגי שקשתותיו מחליפות בין M_1 ל M_2 לסירוגין. אם $(x,z) \in C$ אז נסתכל על הזיווג M_1 ואת כול צלעות $C \cap M_1$ נחליף בצלעות $C \cap M_2$ ועדיין נקבל זיווג מושלם בגרף כי המעגל הוא לסירוגין ולכן צלעות $C \cap M_2$ גם נוגעות בכול הקודקודים, ומחוץ למעגל

הזה ידוע כי M_1 הוא זיווג מושלם. אם (y,w) לא על המעגל אז קיבלנו זיווג מושלם ב G בסתירה, לכן נניח כי (y,w) ו (x,z) נמצאים על אותו המעגל.

אזי $(x,z),(y,w) \in C$. נראה זיווג מושלם לקודקודי C שאינו יכיל את $(x,z),(y,w)$ ואז כשנאחד אותו עם שאר M_1 נקבל זיווג מושלם לכול הגרף בסתירה. נתחיל מקודקוד w ונלך לאורך C תוך כדי שאנחנו לוקחים את קשתות M_1 עד אשר נגיע לאחד מהקודקודים x,z ברגע שנגיע לשם במקום לקחת את הקשת (x,z) לזיווג שלנו נקח את הקשת (x,y) או (y,z) תלוי למי הגענו קודם ואז מy נמשיך על C כעת בכיוון ההפוך מ w וניקח הפעם את קשתות M_2. זה ייצור זיווג מושלם למעגל C שלא מכיל את (x,z) ולא את (y,w) כנדרש.

משפט Peterson:

בגרף 3 רגולרי ו 2 קשיר צלעית יש זיווג מושלם. נבדוק את קיום תנאי $Tutte$.

אזי תהי $S \subseteq V$. אם $S=\phi$ צריך לבדוק שבגרף יש כמות זוגיות של קודקודים, ואכן סכום הדרגות מקיים $3|V| = \sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$ ולכן $|V|$ מספר זוגי.

אם S לא ריקה, אז נסמן $C_1,\dots,C_k$ את רכיבי הקשירות, מגודל אי זוגי בגרף $G\backslash S$. צריך להראות כי $|S| \geq k$. משום שהקשירות הקשתית היא לפחות 2 אז בין C_i ל S יש לפחות שתי קשתות, כי אין קשתות בין C_i לשום C_j אחר כי אחרת הם היו אותו רכיב קשירות, ואם היו פחות מ 2 קשתות אל S אז הגרף לא היה שתיים קשיר קשתית. בנוסף מתקיים מהיות הגרף 3 רגולרי

$3|C_i| =$

ולכן משום ש $|C_i|$ אי זוגי נקבל שמספר הקשתות מ C_i ל S הוא אי זוגי וגדול משתיים ולכן לפחות שלוש. ולכן מתקיים $3|S| = \sum_{v\in S} d(v) \geq \sum_{i=1}^{k} e(C_i,S) \geq 3k$ כאשר $e(C_i,S)$ זה קשתות מ C_i אל S. ולכן $|S| \geq k$ כנדרש.

משפט ברוקס למספר הצביעה

עבור גרף $G=(V,E)$ בעל דרגה מקסימלית Δ כך שהוא אינו קליקה בגודל $\Delta+1$ ובנוסף הוא אינו מעגל אי זוגי ו $\Delta = 2$ אז $\chi(G) \leq \Delta$. נשים לב ששני מקרי הקצה הללו אכן מהווים הדיקות.

בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח ש G קשיר אחרת נצבע כול רכיב קשירות בנפרד.

תחילה נוכיח למה שאומרת שלכול גרף G קשיר וקודקוד v אפשר למצוא סדר σ על הוקדוקדים כך ש v אחרון ולכול קודקוד אחר יש שכן אחריו בסדר. נוכיח באינדוקציה, עבור $n=1$ זה ברור. נניח עבור $k \leq n-1$ ונוכיח עבור n. נסתכל על הגרף $G\backslash v$, הוא מתפרק לרכיבי קשירות $V_1,\dots,V_k$ כך שבכול אחד מהם יש $v_i \in V_i$ שיש קשת מ v_i אל v כי הגרף המקורי היה קשיר. לכן מהנחת האינדוקציה לכול V_i יש סדר σ_i כך ש v_i אחרון בסדר ולכול קודקוד אחר יש שכן אחריו. לכן אם נסדר את התמורות הללו אחת אחרי השנייה ובסוף נשים את v נקבל סדר כנדרש, כי לכול v_i יהיה שכן אחריו והוא v, לכול קודקוד אחר יש שכן אחריו מהנחת האינדוקציה וגם v אחרון כנדרש.

כעת אם קיים קודקוד $v \in V$ כך ש $d(v) < \Delta$ אז מהלמה לעיל יש סדר σ כך שהv הקודקוד האחרון ולכול קודקוד אחר יש שכן אחריו בסדר, ולכן אם נפעיל את הצביעה החמדנית על הסדר הזה נקבל כי לכול קודקוד יש לכול היותר $\Delta - 1$ שכנים לפניו בסדר ולכן נקבל Δ צביעה כנדרש.

לכן נניח כי G הוא Δ רגולרי. נפריד למקרים לפי הקשירות הקודקודית של G.

אם $\kappa(G)=1$ אז קיים קודקוד מנתק, ולכן קיימות V_1,V_2 כך ש $V=V_1\cup V_2$ וגם $V_1\cap V_2=v$ הקודקוד המנתק. כמו כן אין קשתות בין V_1,V_2 כי לאחר הניתוק הם הופכים לרכיבי קשירות שונים. בנוסף יש קשת מ v גם לתוך $V_1\backslash v$ וגם לתוך $V_2\backslash v$ כי הגרף קשיר (ושתי הקבוצות הללו לא טריוויאליות). לכן דרגת v בגרפים $G(V_1),G(V_2)$ היא לא יותר מ $\Delta-1$ כי יש לו לפחות קשת אחת בכול אחד מהם. לכן לפי המקרה הקודם אפשר לצבוע את $G(V_1),G(V_2)$ ב Δ צבעים כול אחד. משום שאין קשתות בין $V_1\backslash v, V_2\backslash v$ אז הצביעה לא מופרת ורק צריך לדאוג ש v נצבע באותו הצבע בשתי הצביעות ואת זה אפשר לסדר על ידי פרמוטציה על הצבים על צביעה אחת כדי לדאוג שהצבע של v יזדהה עם צבעו בשנייה.

אם $\kappa(G)\geq 3$ אז נתבונן בקודקוד $v\in V$ כלשהו ונסתכל על Δ השכנים שלו (הגרף רגולרי). משום שהגרף אינו קליקה על $\Delta+1$ קודקודים אז קיימים שני שכנים u_1,u_2 של v שאין ביניהם קשת. נתבונן בגרף $G'=G\backslash\{u_1,u_2\}$ שיקיים $\kappa(G')\geq 1$ ובפרט הוא קשיר. נשתמש בלמה על הגרף G' והקודקוד v ונקבל תמורה σ' כך שלכול קודקוד ב $V(G')$ יש שכן אחריו בסדר וגם v אחרון. אם בתחילת σ' נצרף את u_1,u_2 אחד אחרי השני ברצף אז כשנפעיל האלגוריתם החמדן אל הסדר החדש הזה נקבל שהוא יצבע אתu_1,u_2 באותו הצבע כי אין ביניהם קשת ואת כול שאר הקודקודים פרט ל v הוא יצבע בצבעים 1 עד Δ כי לכול אחד מהם יש לכול היותר $\Delta-1$ שכנים לפניו בסדר כי יש לו לפחות שכן אחד אחריו. ברגע שיגיע תורו של v להצבע אז יהיה לו צבע פנוי כי יש לו בדיוק Δ שכנים ולפחות שניים נצבעו באותו הצבע, ולכן יש צבע מבין 1 עד Δ שאף שכן שלו לא צבוע בו ולכן אפשר לצבוע את v בצבע הזה כנדרש.

אם $\kappa(G)=2$ נשים לב שאפשר להניח כי $\Delta\geq 3$ כי אם $\Delta=1$ נקבל גרף 1 רגולרי וזה קשת וזה קליקה בגודל 2 בסתירה להנחה על G. כמו כן אם $\Delta=2$ אז G הוא 2 רגולרי ולכן מעגל, אם הוא זוגי אז יש לו 2 צביעה כנדרש, והוא לא אי זוגי מההנחה.

לכן יש שתי קבוצות קודקודים V_1,V_2 כך ש $V_1\cap V_2=\{v_1,v_2\}$ ואין צלעות בין $V_1\backslash\{v_1,v_2\}$ לבין $V_2\backslash\{v_2,v_1\}$ ו$V_1\cup V_2=V$. זה נובע מהיות הגרף 2 קשיר קודקודית בדיוק. אפשר להניח כי $|V_1|,|V_2|\geq 3$ וזה כי יש שם לפחות קודקוד אחד חוץ מ v_1,v_2. נסמן ב $G_1=G(V_1)$ ובאופן דומה $G_2=G(V_2)$. נשים לב כי אפשר להניח $d_{G_1}(v_1)>1$ כי אחרת נשתמש בשכן היחיד שלו, ולשכן יהיו לפחות 2 קשתות כי אחת תלך ל v_1 ומשום שהגרף קשיר תהיה לפחות עוד אחת. כנ"ל $d_{G_2}(v_2)>1$ נתבונן בגרף $G_1\cup(v_1,v_2)$ כלומר הגרף G_1 שהוספנו לו את הקשת הזו (אם היא לא כבר קיימת). נשים לב שזה גרף קשיר שדרגת כול קודקוד היא לא יותר מ Δ כי זה התקיים עבור G עצמו ובנוסף דרגת v_2 היא לא יותר מ $\Delta-1$ כי הורדנו לפחות שני קשתות והוספנו לכול היותר 1. לכן ניתן לצבוע את הגרף הזה ב Δ צבעים ומבוטח שצבעי v_1,v_2 שונים. כמו כן קיימת צביעה של $G_2\cup(v_1,v_2)$ ועל ידי פרמוטציה אפשר לדאוג שהצביעות יזדהו על v_1,v_2 ולכן הדבקת הצביעות היא צביעה חוקית ב Δ צבעים כי אין קשתות בין $V_1\backslash\{v_1,v_2\}$ לבין $V_2\backslash\{v_1,v_2\}$ ודאגנו לקשת (v_1,v_2). לכן הגרף Δ צביע כנדרש.

<u>צביעה קשתית בגרף דו צדדי</u>

בגרף דו צדדי $G=(A\cup B,E)$(חסר לולאות עצמיות) מתקיים $\chi'(G)=\Delta(G)$.

תהי $\Delta(G)$ צביעה אופטימלית. נניח בשלילה שיש צבע i_1 שמופיע בקודקוד מסוים פעמיים, כלומר הצביעה לא חוקית, אז בהכרח בקודקד הזה v יש צבע שלא מופיע, כי יש לו לכול היותר Δ קשתות ולכן רכיב הקשירות של הקשתות שצבועות בצבע הזה הוא מעגל אי זוגי, אבל זו סתירה כי הגרף דו צדדי ולכן הצביעה חוקית כנדרש. ((כנראה שההוכחה של הלמות היא חלק מההוכחה של המשפט, ההוכחה של הלמות מופיעה בפרק על צביעה קשתית))

<u>משפט Vizing:</u>

לכול גרף פשוט G מתקיים כי $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$.

אזי את הצד הפשוט ראינו כבר, כלומר ברור כי $\Delta(G) \le \chi'(G)$.

אזי תהי C צביעה אופטימלית ב $\Delta+1$ צבעים. אם הצביעה אינה חוקית אז קיים צומת u וצבע i_1 שמופיע פעמיים בצומת הזו, בנוסף קיים צבע i_0 שלא מופיע בכלל בצומת u וזאת משום שמספר הצבעים גדול מהדרגה המקסימלית ולכן לכול צומת קיים צבע כזה.

אזי יהיו v, v_1 הקודקודים על גבי הקשתות של u שצבועות ב i_1 והם שונים. יהי i_2 הצבע שחסר ב v_1 כמו שאמרנו לכול קודקוד קיים כזה, אזי הצבע i_2 מופיע בקודקוד u כי אחרת נצבע את הקשת (u,v_1) בצבע i_2 ונקבל שיפור לצביעה בסתירה, כי בקודוקד v_1 הוספנו צבע שלא היה ואולי החסרנו אחד, ובקודקוד u הוספנו צבע שלא היה ולא החסרנו אחד כי i_1 מופיע פעמיים.

אזי קיים קודקוד v_2 כך ש (u,v_2) צבועה בצבע i_2 ויהי i_3 הצבע שחסר בקודקוד הזה אז כמו קודם u חייב להכיל קשת שצבועה בצבע i_3 אחרת יכולנו לשפר. כך נוכל להמשיך ולקבל סדרה של קודקודים וצבעים כך שהקשת (u,v_j) צבוע בצבע i_j והצבע i_{j+1} לא מופיע בקודקוד ה v_j.

מסופיות הגרף קיימים l,k מינמליים כך ש $k<l$ וגם $i_{l+1}=i_k$ כלומר אותו הצבע מופיע פעמיים.
אזי נצבע מחדש את כול הקשתות (u,v_j) לכול $1 \le j \le k-1$ בצבע i_{j+1} במקום בצבע i_j. נשים לב שגם לאחר השינוי הצביעה עדיין אופטימלית כי לכול קודקוד שאינו u החלפנו צבע בצבע אחר שלא קיים בו ולכן מספר הצבעים שהוא נוגע בהם לא ירד, ועבור u רק עשינו הזזה לצבעים, פרט לצבע i_1 i_1 אבל i_1 מופיע פעם נוספת עם קודקוד v. אזי נשים לב שלאחר השינוי הצבע i_k מופיע פעמיים בגרף גם עבור v_k וגם עבור v_{k-1} ובנוסף הצבע i_0 לא מופיע בקודקוד u ולכן רכיב הקשירות של u והצבעים i_0 ו i_k זה מעגל אי זוגי.

כעת נשנה שוב את הצביעה כעת עבור כול הקשתות (u,v_j) כך ש $k \le j \le l$ לצבע i_{j+1} שוב מאותם השיקולים הצביעה תישאר אופטימלית כי הצבע היחיד שנמחק הוא i_k אבל הוא מופיע שוב במקום אחר, ונקבל שוב שצבע i_k מופיע פעמיים ב u כעת עבור v_{k-1} וגם v_{l+1} ולכן רכיב הקשירות של u עם הצבעים i_0 ו i_k הוא שוב מעגל אי זוגי (אבל הפעם קשתות אחרות) .

אבל נשים לב שקיבלנו סתירה, כי אם נתבונן בקודקוד v_k אז בפעם הראשונה הוא היה חלק ממעגל אי זוגי ברכיב הקשירות של i_0, i_k ובפרט דרגתו הייתה 2. כעת לאחר ששינינו את הצבע של הקשת שמחברת אותו ל u להיות לא i_k ולא הפכנו שום קשת אחרת שנוגעת בו לשום צבע אחר, אז כעת דרגתו ברכיב הקשירות היא 1, ולכן לא יתכן שזה מעגל אי זוגי, וזו סתירה.

לכן הצביעה חוקית, כנדרש.

__משפט Ramsey:__

לכול $k,l \in N$ קיים $r \in N$ כך שלגרף המלא על r קודקודים ולכול צביעת קשתות הגרף בשני צבעים יש או קליקה בגודל k מונוכרומטית בצבע הראשון או קליקה בגודל l מונוכרומטית בצבע השני.
(לחילופין אפשר לחשוב על כך שלכול גרף על r קודקודים יש קליקה בגודל k או שבמשלים יש קליקה בגודל l)

למעשה צריך להוכיח את הסופיות של ה r הנ"ל. בבירור מתקיים $r(1,l)=r(k,1)=1$ כי בכול גרף יש קליק בגודל 1 שזה פשוט קודקוד. כמו כן $r(2,k)=k$ ו $r(l,2)=2$ וזה ברור כי כול גרף שיש בו קשת יש בו קליקה בגודל 2, לכן אם בגרף אין קשת אז במשלים יש את כול הקשתות ולכן המשלים הוא קליקה, ולכן מספיק שהוא יכיל את כול הקודקודים הדרושים. לכן נמשיך מכאן באינדוקציה.

למה של ארדש-שקרש:

מתקיים כי $r(k,l) \le r(k,l-1)+r(k-1,l)$.

ואכן נסמן $n=r(k,l-1)+r(k-1,l)$ ונתבונן ב k_n צבוע קשתית בשני צבעים אדום וכחול. יהי v צומת כלשהו, יש לו סך הכול $n-1$ שכנים שלחלקם הוא מחובר באדום ולחלקם בכחול. חייב להיות כי או שהוא מחובר לפחות ל $r(k,l-1)$ מהם באדום או שלפחות ל $r(k-1,l)$ מהם בכחול כי אחרת הוא היה מחובר ל $r(k,l-1)-1$ לכול היותר באדום ולכול היותר $r(k-1,l)$ בכחול וסה"כ מחובר רק ל $n-2$ שכנים בסתירה. לכן ל v יש $r(k,l-1)$ שכנים שהוא מחובר אליהם באדום או $r(k-1,l)$ שכנים שהוא מחובר אליהם בכחול, כך או כך מהנחת האינדוקציה (על מספרי ראמזי!) יש או קליקה מהצבע השני בגודל המלא ואז סיימנו או קליקה מהצבע הנכון אבל בגודל אחד פחות, אבל אז נצרף את v ונקבל הנדרש.

לכן הוכחנו באינדוקציה את משפט ראמזי בעזרת הלמה כי הנחנו באינדוקציה שיש סופיות והראנו סופיות גם לשלב הבא. כלומר הראנו כי $r(k,l) \le r(k,l-1)+r(k-1,l)$ ולכן אפשר להמשיך ולהקטין ככה עד שנגיע לערכים שאנחנו יודעים שזה עבור 1 ו 2 ולקבל סופיות כנדרש.

החסם התחתון של ארדש למספרי ראמזי:

אם $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}<1$ אז $n<r(k,k)$, כלומר יש צביעה בשני צבעים של k_n כך שאין קליקה בגודל k בשום צבע.

נתבונן באוסף כול הצביעות האפשריות לגרף K_n בשני צבעים. יש $2^{\binom{n}{2}}$ כאלה כי לכול קשת צריך לבחור אדום או כחול. תהי $K\subseteq[n]$ תת קבוצה של קודקודים כלשהי, כך ש $|K|=k$ אזי מתוך כול הצביעות האפשריות, מספר הצביעות בהן הקליקה הזו מונוכרומטית הוא $2*2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ כי זה כול הדרכים לצבוע את כול שאר הקשתות מלבד הקשתות של הקליקה, וזה כפול שתיים כי אפשר גם באדום וגם בכחול. כעת נשים לב שיש $\binom{n}{k}$ קבוצות קודקודים בגודל k. ולכן מספר הצביעות לכול היותר שיש בו קליקה מונוכרומטית מגודל k הוא לכול היותר $\binom{n}{k}2*2^{\binom{n}{2}-\binom{n}{k}}$ (יש פה ים של ספירות כפולות אבל זה לא נורא כי אנחנו רק צריכים חסם עליון). לכן אם המספר הזה קטן ממספר כול הצביעות האפשריות אז יש צביעה שאין בה קליקה מונוכרומטית ולכן נקבל דוגמא נגדית למשפט רמזי ולכן המספר קטן מדיי. ואכן מהדרישה מתקיים

ולכן משום שזה מה שדרשנו אז נקבל שאכן יש צביעה שאין בה קליקה מונכרומטית ולכן זה לא מספר רמזי.

משפט טורן:

למה ראשונה: עבור גרף $G=(V,E)$ שלא מכיל בתוכו K_{m+1} אז הוא נשלט בדרגות על ידי m צדדי שלם. כלומר כול עוד אתה לא מכיל קליקה גדולה מדיי, הדרגות המקסימליות מתקבלות על פני הגרף הm צדדי השלם.

הוכחת הלמה: נוכיח באינדוקציה על m. עבור $m=1$ אז אין K_2 בגרף בפרט אין קשת בפרט כול הדרגות הן אפס ולכן כול גרף שולט בדרגות עליו, בפרט הוא עצמו שמהווה גרף 1 צדדי שלם באופן ריק.

נניח עבור $n-1$ ונוכיח עבור n. אזי יהי G שלא מכיל בתוכו K_{n+1} ותהי $v\in V$ צומת מדרגה מקסימלית $d(v)=\Delta$. נסמן V_1 את כול שכני v, אזי בבירור $|V_1|=\Delta$. נסמן V_2 את כול שאר

הקודקודים (זה גם כולל את v עצמו). כעת נייצר גרף חדש G' שהוא ה $join$ של V_1 וקבוצה בלתי תלויה שהיא קודקודי V_2 ללא הקשתות שלהם. (נזכר ש$join$ זה העברת כול קשת בין שני קודקודים כך שכול אחד שייך לגרף אחר מבין השניים).

קל לראות כי G' שולט בדרגות על פני G כי קודקודי V_2 דרגתם עלתה ל Δ שהיא המקסימלית שהייתה וקודקודי V_1 דרגתם רק עלתה. כמו כן V_1 לא מכיל K_m כי אחרת יחד עם v זה היה K_{m+1} ולכן מהנחת האינדוקציה יש גרף $m-1$ צדדי שלם ששולט בדרגות על $G(V_1)$ ולכן הגרף הזה $join$ עם קודקודי V_2 ללא הקשתות בינהם הוא m צדדי שלם ששולט על G כנדרש.

כמו כן קל לראות שהשליטה בדרגות היא ממש אם ורק אם הגרף המקורי לא היה m צדדי שלם בעצמו.

<u>למה שנייה:</u> אם גרף G בעל n צמתים הוא m צדדי שלם אז יש לו פחות קשתות מאשר לגרף טורן $T_{n,m}$ והשוויון אם ורק אם הם איזומורפים. כלומר כדי למקסם את כמות הקשתות כדאי להיות גרף טורן.

ואכן יהיו $x_1,\dots,x_m$ גדלי m הצמתים בגרף G ממוינים בסדר עולה אז $\sum_{i=1}^{m} x_i = n$ כמובן. משום שכול הקשתות בין צדדים שונים קיימות אז $|E| = \sum_{1\le i<j\le m} x_i x_j$. אם מתקיים $x_1 \le x_m + 1$ כלומר הצדדים מאוזנים עד כמה שאפשר, אז הגרף איזומורפי לגרף טורן. אם זה לא מתקיים כלומר יש הפרש של לפחות 2, כלומר $x_m \ge x_1 + 2$ אז יש גרף בעל יותר קשתות, וכך נוכל להמשיך לשפר את כמות הקשתות עד שנגיע לגרף טורן.

הגרף בעל יותר הקשתות הוא גרף m צדדי שיהיה זהה ל G פרט שנעביר קודקוד אחד מ x_m ל x_1 וכול השאר ישאר כמו שהוא. אזי ${x_i}'$ זה גדלי הצדיים בגרף החדש. אזי נבדוק את הפרש הצלעות $\sum_{1\le i<j\le m} x_i' {x_j}' - \sum_{1\le i<j\le m} x_i x_j = x_1' x_m' - x_1 x_m$ פשוט מאלגברה פשוטה וברור שהביטוי הזה חיובי לכן שיפרנו כנדרש.

<u>משפט טורן:</u> לכול גרף פשוט על n קודקודים שלא מכיל את K_{m+1} אז מספר הקשתות שלו קטן ממספר הקשתות של $T_{n,m}$ ושוויון אם ורק אם הם איזומורפים.

<u>נוסחת אוילר לגרפים מישוריים:</u>

לכול גרף במישור קשיר מתקיים $|V| - |E| + \phi = 2$ כאשר ϕ זה מספר הפאות שלו.

נוכיח באינדוקציה על ϕ. אם $\phi = 1$ אז יש פאה יחידה לכן הגרף לא מכיל אף מעגל ולכן G עץ ולכן $|E| = |V| - 1$ ולכן $|V| - (|V| - 1) + 1 = 2$ כנדרש.

נניח עבור $\phi - 1$ ונוכיח עבור ϕ. ניקח קשת כלשהי בשפת פאה חסומה, יש לפחות פאה אחת חסומה כי יש יותר מפאה אחת, ורק אחת היא הפאה החיצונית. נסמן הקשת הזו ב e. משום שהפאה חסומה e משתתפת במעגל ולכן $G\backslash e$ עדיין קשיר. ב $G\backslash e$ יש עדיין $|V|$ צמתים אבל עכשיו $|E| - 1$ קשתות ו $\phi - 1$ פאות. לכן מהנחת האינדוקציה $|V| - (|E| - 1) + \phi - 1 = 2$ ולכן $|V| - |E| + \phi = 2$ כנדרש.

משפטים מגניבים שלא צריך לדעת להוכיח: להשלים!!!

- **<u>משפט נקודת השבת של בראור + למת שפרנר:</u>**
- **<u>משפט העצים והמטריצות:</u>**
  עבור גרף $G=(V,E)$ כך ש $|V|=n$ אז מספר העצים הפורשים ב G הוא כדטרימנטה של מינור של המטריצה $D-A$ כאשר D מטריצה אלכסונית שעל האלכסון נמצאות הדרגות של הקודקודים, ו A מטריצת השכנויות של הגרף, כלומר בכול תא יש 1 אם יש קשת בין האינדקסים ואפס אחרת.
- **<u>לכול גרף מתקיים $\kappa(G)\le\kappa'(G)\le\delta(G)$</u>**
- **<u>משפט $Whitney$ הכנה למשפט מנגר: לכול גרף על לפחות 3 קודקודים הוא 2 קשיר קודקודית אם ורק אם יש בין כול זוג קודקודים לפחות 2 מסלולים זרי פנים בקודקודים.</u>**
- **<u>משפט מנגר:</u>**
- ***<u>תנאי הכרחי למעגל המילטון:</u>***

אזי יהי C מעגל ההמילטון בגרף, נכוון את קשתותיו עם כיוון המעגל. תהי S קבוצה כלשהי של קודקודים ויהיו $V_1,\dots,V_k$ רכיבי הקשירות בגרף $G\backslash S$. משום ש C מבקר בכול קודקודי G הוא מבקר לפחות פעם אחת בכול רכיב קשירות V_i. לכן חייב להיות קשת מ V_i ל S לכול i כי הקשת שמחברת אותו למעגל לא יכולה ללכת לשום רכיב קשירות V_j אחר כי אז הם היו באותו רכיב הקשירות. לכן לכול V_i יש קשת שיוצאת ממנו לתוך S וכמו כן כול קשת כזו מתחברת לקודקוד אחר ב S כי דרגת הכניסה של כול קודקוד במעגל היא בדיוק 1. לכן לכול רכיב קשירות אפשר להתאים קודקוד ב S ולכן $k\le|S|$ כנדרש.

- ***<u>מספר זיווג ומספר כיסוי:</u>***

בכול גרף G מתקיים $\mu(G)\le\tau(G)\le2\mu(G)$.

יהי זיווג כלשהו M בגודל $\mu(G)$ וכיסוי כלשהו T בגודל $\tau(G)$. משום ש T כיסוי אז לכול קשת $e\in M$ מתקיים כי e נחתכת עם T. אבל משום ש M זיווג אז קשתותיו זרות, ולכן לכול קשת $e\in M$ קיים לפחות קודקוד אחד יחיד עבורה שנמצא ב T ולכן $|T|\ge|M|$ ולכן נקבל $\tau(G)\ge\mu(G)$. כמו כן יהי M' זיווג מקסימלי בהכלה כלומר שכול קשת שנוסיף ל M' תחתך אם אחת מקשתות M', אזי כול קשת ב G נחתכת עם קשתות M' ולכן קודקודי הקשתות M' מהווים כיסוי, ולכן יש כיסוי בגודל $2|M'|$ כי לכול קשת יש לכול היותר שני קודקודים חדשים לתרום, ולכן יש כיסוי בגודל לכול היותר $2\mu(G)$ כנדרש.

- ***<u>$\chi(G)+\chi(\bar{G})\le n+1$:</u>***

נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n=1$ נקבל גרף שהוא קודקוד בודד ולכן 1 צביע, וגם המשלים שלו. לכן הסכום הוא 2 וזה בדיוק $n+1$ כנדרש.

נניח נכונות לכול $k\le n$ ונוכיח עבור $n+1$. יהי $v\in V$ קודקוד כלשהו, אזי עבור $G'=G\backslash v$ מתקיים מהנחת האינדוקציה כי $\chi(G')+\chi(\overline{G'})\le n+1$. נסמן $k=\chi(G')$ ו $l=\chi(\overline{G'})$. לכן $k+1\le n+1$. אם $k+l\le n$ אז נוכל לצבוע את G בעזרת צביעה של G' והוספת צבע חדש עבור הקודקוד v וכנ"ל עבור $\bar{G}$ ולכן כי $\chi(G)+\chi(\bar{G})\le(k+1)+(l+1)$ ולכן $\chi(G)+\chi(\bar{G})\le n+2$ כנדרש.

לכן נניח כי $k+l=n+1$. תהי $(V_1,\dots,V_k)$ חלוקה לקבוצות בלתי תלוית של G' ותהי $(U_1,\dots,U_l)$ חלוקה לקבוצות בלתי תלויות של $\overline{G'}$. אם קיים i עבורו v לא מחובר לאף קודקוד ב V_i אז נוכל לצבוע את G גם ב k צבעים על ידי צביעת v בצבע i ובמשלים להגדיל באחד את מספר הצבעים ולקבל הנדרש. כנ"ל אם יש j עבורו v לא מחובר לאף קודקוד ב V_j

בגרף המשלים נוכל לעשות אותו הדבר. אם לא קיים i ולא j כנ"ל סימן שv מחובר לפחות לקודקוד אחד בכול V_i ולכן יש לו לפחות k קשתות, וכמו כן במשלים יש לו לפחות l קשתות אבל ידוע לנו כי $k + l = n + 1$ וזה לא יכול להיות כי יש סך הכול n קשתות אפשריות ואין חפיפה בין קשתות הגרף לקשתות המשלים.

- ***<u>ניוון וצביעה קודקודית:</u>***

מתקיים כי $\chi(G) \le 1 + degen(G)$. כי נשים לב שעבור גרף d מנוון קיים סדר על הקודקודים σ כך שלכול קודקוד יש לכול היותר d שכנים לפניו בסדר σ. נבנה את הסדר באופן הבא, משום ש G הוא d מנוון קיים קודקוד מדרגה לכול היותר d, נשים אותו אחרון בסדר ולכן לפניו לא יהיו לו יותר מ d שכנים. כעת נבנה את הסדר מהסוף להתחלה, כדי להחליט מי יהיה הקודקוד ה i בסדר לאחר שכבר החלטנו את כול הקודקודים מ $i + 1$ עד n נתבונן בגרף $G \setminus \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ מהניוון גם בו יש קודקוד מדרגה לכול היותר d ולכן נשים אותו כעת בסדר ומובטח שלא יהיו לפניו יותר מ d שכנים.

לכן אם נפעיל את הצביעה החמדנית על הסדר הזה נקבל צביעה בגודל $1 + degen(G)$ כנדרש.

- ***<u>קשירות קשתית של גרף קריטי לצביעה</u>***

אם G גרף k קריטי לצביעה אז $\kappa'(G) \ge k - 1$.

נניח בשלילה ש $\kappa'(G) = m < k - 1$ אז קיים פירוק של קודקודי $V = V_1 \cup V_2$ כך שיש בדיוק m קשתות בין V_1 ל V_2 ואין קודקודים משותפים. משום ששתי הקבוצות לא טריוויאליות אז לכול תת גרף שנפרש מהן יש $k - 1$ צביעה. נסמן $(S_1, \dots, S_{k-1})$ את החלוקה לקבוצות בלתי תלויות שהיא הצביעה של $G(V_1)$ ונסמן $(T_1, \dots, T_{k-1})$ את החלוקה לקבוצות בלתי תלויות שהיא הצביעה של $G(V_2)$ ונגדיר גרף דו צדדי שצד אחד שלו זה $(S_1, \dots, S_{k-1})$ והשני הוא $(T_1, \dots, T_{k-1})$ ויש קשת בין T_i ל S_j אם בחתך $[V_1, V_2]$ אין קשתות בין T_i ל S_j. נשים לב שבחתך הזה יש m קשתות ולכן לכול היותר m קשתות חסרות בגרף הדו צדדי הנ"ל. אם נמצא זיווג מושלם בגרף הזה אז נוכל לאחד את הצביעות לצביעה קונסיסטנטית אחת לכול הגרף ב $k - 1$ צבעים בסתירה. ואכן הגרף הדו צדדי שלנו הוא $K_{n,n}$ עד כדי שהסירו לו $m < n$ קשתות ולכן תנאי הול מתקיים בו ולכן יש זיווג מושלם בסתירה כנדרש.

- ***<u>משפט ארדש: (ההוכחה ההסתברותית)</u>***

לכול k, l טבעים קיים גרף G עם מותן l (אין לו מעגלים קצרים מ l) ובכול זאת $\chi(G) \ge k$.

<u>פתרונות נבחרים לשאלות:</u>

- גרף שמקיים $\chi(G) = k + 2$ עבור $k \ge 3$ אז יש לו מעגל C כך שהאורך של C שנסמן l מקיים $l \equiv 2 \ (mod\ k)$. ואכן קיים תת גרף קריטי לצביעה, ולכן הדרגה המינמלית שלו הוא $k + 1$. נסתכל במסלול הארוך ביותר בגרף הזה, מהקצה יוצאים k מעגלים. אם כולם שונים $mod\ k$ אז בפרט אחד מהם הוא 2 מוד k. אם יש שניים ששווים מוד k אז המעגל שהוא ההפרש בינהם הוא מאורך 2 מוד k כנדרש.
- גרף קשיר על לפחות 4 קודקודים שמקיים שכול צלע שלו משתתפת בזיווג מושלם אז הוא 2 קשיר קודקודית. ואכן נניח בשלילה שיש קודקוד מנתק v אז לאחר הסרת v מהגרף הוא מתפרק לרכיבי קשירות. משום שקיים זיווג מושלם אז תנאי $tutte$ מתקיים ולכן מספר רכיבי

הקשירות האי זוגיים הוא לכול היותר 1 כי הסרנו קודקוד יחיד, ולכן משום שיהיו לפחות 2 רכיבי קשירות אז יהיה רכיב קשירות אחד עם כמות זוגית של קודקודים. משום שהגרף קשיר תהיה קשת מהרכיב הנ"ל אל v. נראה שהקשת הזו לא יכולה להיות חלק מזיווג מושלם בסתירה. ואכן אם הקשת הזו חלק מזיווג מושלם אז ברכיב הקשירות נשארים כמות אי זוגית של קודקודים, ומשום שאין מהם קשתות לשום רכיב קשירות אחר הם חייבים להזדווג אחד עם השני, אבל יש כמות זוגית מהם וזו סתירה.

- צריך להוכיח שלכול מספר טבעי k קיים מספר טבעי n כך שלכול סדרה באורך n של מספרים שונים יש תת סדרה באורך k שהיא עולה או יורדת. שאלה קלאסית לרמזי. נתבונן ב $n = r(k, k)$ ונסתכל על גרף שלם על n קודקודים. את קשתות הגרף נצבע באדום ובכחול בהתאם לערכי הסדרה, כלומר את הקשת (i, j) כך ש $i < j$ נצבע באדום אם $a_i < a_j$ ובכחול אחרת. ממשפט רמזי קיימת קליקה מונוכרומטית בגודל k ולכן אם נסדר את האיברים לפי הסדר בקבוצה בגודל k הזו נקבל תת סדרה באורך k ומשום שכול הקשתות נצבעו באותו הצבע אז תמיד מתקיים שמי שמופיע קודם גדול/קטן יותר ממי שמופיע אחר כך ולכן זו סדרה מונוטונית כנדרש.