תורת הגרפים

<u>הגדרות:</u>

1. **גרף**: זוג סדור (V,E) כאשר V היא קבוצה (סופית) שאיבריה נקראים **קודקודים** או **צמתים** ו- E אוסף של זוגות (לא סדורים) של איברי V שנקראים **צלעות** או **קשתות**.
2. **לולאה** בגרף היא צלע שבה מופיע אותו קודקוד פעמיים.
3. **קשת מרובה** היא קשת המופיעה ב- E יותר מפעם אחת.
4. **הצגה גרפית** של גרף היא ייצוג שלו במישור, כשכל קודקוד מיוצג על ידי נקודה, וכל צלע מיוצגת על ידי עקום שקצותיו הם הנקודות המתאימות לקודקודים המרכיבים את הצלע.
5. **גרף פשוט** הוא גרף שאינו מכיל לולאות או צלעות מרובות.
6. קודקוד **חל** בצלע אם הוא אחד מאיבריה. במקרה כזה, נאמר גם שהצלע **חלה** בקודקוד.
7. צלעות הן **סמוכות** אם יש להן קודקוד משותף, וקודקודים הם **סמוכים** אם הם מחוברים בצלע.
8. **קצות צלע** הם זוג הקודקודים שחלים בה.
9. זוג גרפים $G=(V,E)$ ו- $G'=(V',E')$ נקראים **איזומורפיים** אם יש פונקציות חח"ע ועל $f:V\to V'$ ו- $g:E\to E'$ באופן שיחסי החילה נשמרים, כלומר אם $e\in E$ ו- $e=\{u,v\}$ כאשר $u,v\in V$ אזי $g(e)=\{f(u),f(v)\}$ (כלומר v חל ב- e $\Leftrightarrow$ $f(v)$ חל ב- $g(e)$, ובמילים אחרות, G ו- G' הם אותו הגרף עד כדי שינוי שמות הקודקודים והקשתות).
10. **גרף שלם** על n קודקודים הוא גרף בעל n קודקודים, שכל שניים מהם מחוברים על ידי קשת אחת. סימון: K_n.
11. **גרף ריק** על n קודקודים הוא גרף בעל n קודקודים ללא קשתות. סימון: E_n.
12. גרף $G=(V,E)$ הוא **גרף דו-צדדי** עם $V=A\cup B$ ו- $A\cap B=\emptyset$, ולכל צלע יש קצה ב- A וקצה ב- B.
גרף דו-צדדי שלם על $m+n$ קודקודים, המסומן ב- $K_{m,n}$ הוא גרף שלו קבוצת קודקודים A בגודל m וקבוצה B בגודל n, וכל קודקוד ב- A מחובר לכל קודקוד ב- B.
13. קודקוד **מבודד** הוא קודקוד שלא חלות בו צלעות.
14. **מטריצת החילה** של גרף $G=(V,E)$ המסומנת ב- $M(G)$ היא מטריצה $M(G)=(M_{v,e})_{\substack{v\in V\\ e\in E}}$ ששורותיה מסומנות בקודקודים בגרף ועמודותיה בצלעותיו, כאשר: $M_{v,e}=\begin{cases}2 & \text{e לולאה בקודקוד v}\\ 1 & \text{v קצה של e ואינה לולאה}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.
15. **מטריצת הסמיכויות** או **מטריצת השכנויות** המסומנת ב- $A(G)$ היא המטריצה $A(G)=(A_{u,v})_{\substack{u\in V\\ v\in V}}$ שבה $A_{u,v}$ הוא מספר הצלעות שמחברות את u ו- v.
16. **הדרגה** של קודקוד, המסומנת ב- $d(v)$, היא מספר הצלעות החלות בו, כאשר לולאה נספרת פעמיים.
נסמן ב- $\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית ב- G, וב- $\delta(G)$ את הדרגה המינימלית.

<u>סימונים:</u> עבור גרף $G=(V,E)$:

- $v(G)=|V|$ – מספר הקודקודים ב- G.
- $e(G)=|E|$ – מספר הצלעות ב- G.

<u>משפט:</u> לכל גרף $G=(V,E)$ מתקיים: $\sum_{v\in V} d(v)=2\cdot e(G)$.

<u>הוכחה:</u> נסכום את איברי מטריצת החילה $M(G)$. הסכום בכל עמודה הוא 2, ולכן הסכום הכולל הוא פעמיים מספר העמודות. הסכום בשורה v הוא $d(v)$, ולכן הסכום הוא גם $\sum_{v\in V} d(v)$. לכן, הנ"ל שווים. מש"ל.

<u>מסקנה:</u> בכל גרף, מספר הקודקודים מדרגה אי-זוגית הוא זוגי (כי סכום הדרגות זוגי).

<u>הגדרות:</u>

1. **הילוך** ב- $G=(V,E)$ הוא סדרה $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$ שמורכבת מקודקודים $v_i\in V$ וצלעות $e_i\in E$ לסירוגין, כאשר קצות e_i הם v_i ו- v_{i-1}. זהו הילוך מ- v_0 ל- v_k, **ואורכו** k.
אם הגרף הוא פשוט, נסמן בדרך כלל רק את הקודקודים ולא את הקשתות.
אם צלעות ההילוך כולן שונות, הוא נקרא **מסילה**. אם גם כל הקודקודים שונים, הוא נקרא **מסילה פשוטה** או **מסלול**. אם הקודקודים שונים פרט לראשון והאחרון (כלומר הראשון הוא גם האחרון), ההילוך נקרא **מעגל פשוט**.
2. זוג קודקודים $u,v\in V$ בגרף $G=(V,E)$ נקראים **קשורים** אם יש הילוך מ- u ל- v. זהו יחס שקילות, כשמחלקות השקילות שלו נקראות **מרכיבי הקשירות** או **רכיבי הקשתיות** של הגרף. אם יש רק רכיב קשירות אחד, הגרף נקרא **קשיר**.

דוגמה: בעיית המלבן: מלבן נקרא **שלם** אם אורכו או רוחבו (או שניהם) שלמים. נתון מלבן המורכב ממלבנים שלמים, שכל אחד מהם שלם. האם המלבן הגדול שלם? כן, תמיד.

פתרון: נבנה מלבן שקודקודיו מורכבים מקודקודי המלבנים הקטנים. לכל מלבן קטן, נבחר זוג צלעות מקבילות בין קודקודים מתאימים, כשאורך הצלעות שלם (אם גם האורך וגם הרוחב שלמים, נבחר אחד מהם שרירותית). מכל מלבן קטן מקבלים שתי צלעות, והגרף המתקבל עשוי להכיל צלעות מרובות. ברור שלפינות המלבן הגדול דרגה 1 (באופן כללי, מספר דרגת כל קודקוד כאן הוא מספר המלבנים הקטנים שהוא קודקוד שלהם, כי שתי צלעות בכל מלבן תורמות 1 לדרגת כל קודקוד במלבן). קל לוודא שכל קודקוד אחר הוא מדרגה 2 או 4, ובפרט זוגית. לכן, לפי המסקנה הקודמת, ברכיב הקשירות של הפינה השמאלית התחתונה יש עוד פינה (כי מספר הקודקודים מדרגה אי-זוגית ברכיב הוא זוגי). שתי הפינות נבדלות ברכיב x או y. בה"כ נניח שב- x. שצועדים לאורך ההילוך מפינה אחת לשנייה, בכל שלב (מעבר על צלע) ערך x משתנה במספר שלם. לכן, בסך הכל, השינוי שלם, ולכן הפרש ערכי x בין הפינות שלם, ולכן המלבן הגדול שלם. מש"ל.

הגדרה: **חלוקה סימפליציאלית** של משולש סגור במישור היא חלוקה שלו למשולשים סגורים זרים ופנימיים, כך שחיתוך כל זוג משולשים קטנים הוא או ריק, או קודקוד משותף או צלע שלמה משותפת. **מספור חוקי** של חלוקה סימפליציאלית הוא מספר כל הקודקודים של המשולשים הקטנים כך שקודקודי המשולש הגדול ממוספרים $0,1,2$, וכל קודקוד שנמצא על צלע המשולש הגדול שקצותיה ממוספרים i,j ממוספר ב- i או ב- j, וכל קודקוד אחר ממוספר ב- $0,1,2$. משולש קטן ייקרא **מיוחד** אם קודקודיו ממוספרים ב- 0, 1 ו- 2.

למה: יהי I קטע שמחולק לקטעים קטנים $I_1,\ldots,I_n$. נמספר את כל קודקודי הקטעים הקטנים ב- $1,2$ כך שקודקודי I ימוספרו ב- $1,2$. אזי מספר הקטעים הקטנים I_j שקצותיהם מוספרו ב- $1,2$ הוא אי-זוגי.

הוכחה: נוסיף קטע (עקום) I_0 שיסגור את I למעגל, ונבנה גרף על $I_0,I_0,\ldots,I_n$ כקודקודים, כאשר I_i,I_j מחוברים $\Leftrightarrow$ יש ל- I_i,I_j קצה משותף שממוספר ב- 2. ברור של- I_0 יש דרגה 1, ולכל צומת אחר יש דרגה 0, 1 או 2. מהמסקנה שהוכחנו, מספר הקודקודים I_j ($1\le i\le n$) שדרגתם אי זוגית (כלומר 1) הוא אי-זוגי. מש"ל.

למת *Sperner*: בכל חלוקה סימפליציאלית (לא טריביאלית) של משולש, ובכל מספור חוקי שלה, יש מספר אי-זוגי של משולשים מיוחדים (ובפרט קיים משולש מיוחד).

הוכחה: יהי T המשולש הגדול, ו- $T_1,\ldots,T_n$ המשולשים הקטנים כחלוקה, ונוסיף את T_0 – משלים המשולש הגדול. נבנה גרף שקודקודיו הם ה- T_i -ים, ושניים מחוברים $\Leftrightarrow$ חיתוכם הוא צלע שקודקודיה ממוספרים ב- $1,2$. נשים לב שעל סמך הלמה הקודמת, ל- T_0 יש דרגה אי-זוגית. כמו כן, לכל T_i יש דרגה שהיא מספר הצלעות שלו אשר קצותיהן ממוספרים ב- $1,2$, ולכן הדרגה היא 1 או 2, והמשולש מיוחד $\Leftrightarrow$ הדרגה 1. לכן, מהמסקנה שהוכחנו, יש מספר אי-זוגי של קודקודים T_i שדרגתם 1, כלומר יש מספר אי-זוגי של משולשים מיוחדים. מש"ל.

משפט נקודת השבת של *Brouwer*: יהי T משולש סגור במישור, $f:T\to T$ רציפה. אזי קיימת נקודת שבת, כלומר $\exists x\in T.f(x)=x$.

הוכחה: נסמן את קודקודי המשולש ב- p_0,p_1,p_2. לכל נקודה במשולש יש הצגה יחידה מהצורה $p=x_0p_0+x_1p_1+x_2p_2$ כאשר $0\le x_i\le 1$ ו- $x_0+x_1+x_2=1$. לכן, נסמן את הנקודה p על ידי הקואורדינטות $(x_0(p),x_1(p),x_2(p))=(x_0,x_1,x_2)$. כמו כן, נסמן: $f(p)=(x_0',x_1',x_2')$. נתבונן בחלוקה סימפליציאלית של המשולש למשולשים קטנים (מאוד).

נגדיר קבוצות $S_i=\{p\in T|x_i'(p)\le x_i(p)\}$. נשים לב כי יש מספור חוקי של קודקודי החלוקה הסימפליציאלית, שבו אם קודקוד p מסומן ב- $i\in\{0,1,2\}$, אזי $p\in S_i$, ואכן $p_0=1\cdot p_0+o\cdot p_1+0\cdot p_2$, ולכן ברור כי $p_0\in S_0$, ו- $x_0'\le 1$. ממש כך, אפשר לסמן את p_1,p_2 ב- $1,2$ בהתאמה.

באופן דומה, אם p על הצלע p_1,p_2 אזי $p=0\cdot p_0+x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2$ כאשר $x_1+x_2=1$, ולכן $x_1'+x_2'\le 1$, ולכן ברור כי $x_1'\le x_1$ או $x_2'\le x_2$ (או שניהם), ולכן $p\in S_1$ או $p\in S_2$.

כמו כן, לכל $p\in T$ כך ש- $p=x_0p_0+x_1p_1+x_2p_2$ כאשר $x_0+x_1+x_2=1$, וכן $f(p)=x_0'p_0+x_1'p_1+x_2'p_2$ ו- $x_0'+x_1'+x_2'=1$, ברור שיש i כך ש- $x_i'\le x_i$.

מלמת *Sperner*, יש משולש קטן מיוחד. ניקח חלוקות למשולשים קטנים יותר ויותר, ונקבל סדרת משולשים מיוחדים שקוטרם שואף ל- 0. ניקח לה תת-סדרה מתכנסת (שקיימת על סמך קומפקטיות). הואיל ו- f רציפה, נובע שנקודת ההתכנסות $p\in T$ מקיימת $p\in S_0\cap S_1\cap S_2$, אבל $x_0'+x_1'+x_2'=x_0+x_1+x_2$, ולכן בהכרח $\forall i.x_i=x_i'$ ולכן $f(p)=p$.

מש"ל.

טענה: יהי G גרף קשיר, ויהי C מעגל ב- G. אזי לכל צלע $e\in C$ הגרף $G'=G\setminus\{e\}$ הוא עדיין גרף קשיר.

הוכחה: נשים לב כי כל מעגל מכיל שני מסלולים זרי צלעות בין כל זוג קודקודים. לכן, סילוק של צלע כלשהי e ממעגל C לא מנתק אף זוג מקודקודי C. לכן, הסילוק של e לא יכול לנתק אף זוג קודקודים $w_1\ne w_2\in V$. מש"ל.

יערות ועצים

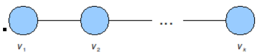
הגדרות:

1. גרף G נקרא **יער** אם הוא אינו מכיל אף מעגל.
2. גרף G נקרא **עץ** אם הוא קשיר ואינו מכיל מעגלים.
3. יהי G עץ. קודקוד $u\in V(G)$ נקרא **עלה** אם $d_G(u)=1$.

למה:

1. יהי G עץ עם $n\geq 2$ קודקודים. אזי G מכיל לפחות 2 עלים.
2. יהי v עלה של עץ G עם $n\geq 2$ קודקודים. אזי סילוק של v מ-G יוצר עץ G' עם $n-1$ קודקודים.

הוכחה:

1. מכיוון ש-$|V(G)|=n\geq 2$ ו-G עץ (ולכן קשיר), ב-G קיימות צלעות. נבחר אם כן מסלול P ארוך ביותר ב-G (אם יש כמה כאלה, נבחר אחד כזה שרירותית). נניח $P=(v_1,\dots,v_k)$.
אם $(u,v_1)\in E(G)$ אזי $u\in\{v_2,\dots,v_k\}$ (אחרת ניתן להוסיף את הצלע (u,v_1) אל P וליצור בזאת מסלול ארוך יותר בסתירה לבחירת P).
אם אכן קיימת $(u,v_1)\in E(G)$ כאשר $u\neq v_2$, אזי לפי האמור לעיל, $u=v_i$ עבור $3\leq i<k$, ובזאת קיבלנו מעגל $C=(v_1,\dots,v_i,v_1)$, בסתירה לכך ש-G עץ (ולכן חסר מעגלים).
לכן, הצלע היחידה של G שמכילה את v_1 היא הצלע (v_1,v_2), ולכן v_1 הוא קודקוד מדרגה 1 ב-G, כלומר עלה.
באופן דומה, גם הקצה השני v_k של P הוא עלה של G.
הערה: הטענה הדוקה:  $G=P$. (עץ מגודל עם שני עלים).
2. יש להראות כי סילוק של עלה מעץ G יוצר עץ G'. נראה:
א. G' הוא חסר מעגלים: מיידי, כי $G'\subseteq G$, ו-G הוא חסר מעגלים.
ב. G' גרף קשיר: יש להראות כי לכל זוג $u\neq w\in V(G')$, קיים מסלול P ב-G' אשר מחבר מ-w ל-u. מכיוון ש-G קשיר, קיים מסלול P כזה ב-G. נשים לב כי $v\neq u$ ו-$v\neq w$. כמו כן, לא ייתכן ש-v קודקוד ביניים של P, כי לכל קודקוד ביניים ב-P הדרגה היא 2 לפחות, ו-v עלה, ולכן דרגתו 1. מכאן, $v\notin V(P)$, ולכן המסלול P שייך כולו גם לגרף G'. לכן, G' קשיר.

מש"ל.

אפיונים שקולים של עצים

משפט: יהי G גרף על n קודקודים. אזי התכונות הבאות שקולות:

1. G גרף קשיר ללא מעגלים (הגדרת עץ).
2. G גרף קשיר עם $n-1$ צלעות.
3. G גרף ללא מעגלים עם $n-1$ צלעות.
4. לכל זוג $u\neq v\in V(G)$, קיים מסלול יחיד ב-G המחבר בין u ל-v.

הוכחה: נוכיח $1\Leftarrow$ 2 ו-3, $2\Leftarrow$ 1 ו-3, $3\Leftarrow$ 1 ו-2, $1\Leftarrow 4$, $4\Leftarrow 1$.

$1\Leftarrow$ 2 ו-3:

צ"ל: כל עץ G על n קודקודים מכיל בדיוק $n-1$ צלעות. נוכיח באינדוקציה על n:
בסיס – $n=1$: במקרה זה, G גרף עם קודקוד אחד, ולכן G לא מכיל אף צלע, ולכן $|E(G)|=0$.
צעד האינדוקציה: יהי G עץ עם $n\geq 2$ קודקודים. לפי הלמה, G מכילה עלה v, והסילוק של v יוצר עץ G' עם $n-1$ קודקודים. לפי הנחת האינדוקציה, ב-G' יש בדיוק $n-2$ צלעות. מכיוון ש-v הוא עלה של G, ב-G יש צלע אחת בדיוק שמכילה את v, ולכן $|E(G)|=|E(G')|+1=n-1$.

$2\Leftarrow$ 1 ו-3:

צ"ל: כל גרף קשיר G עם n קודקודים ו-$n-1$ צלעות הוא עץ. מספיק להראות שהוא חסר מעגלים.
נתחיל מ-$G'=G$, וכל עוד G' מכיל מעגל C, נבחר צלע שרירותית $e\in C$ ונסקלה מהגרף, ונגדיר $G'=G'\setminus\{e\}$. התהליך מסתיים אחרי מספר סופי של צעדים עם הגרף G^*.
נשים לב:

א. G^* הוא גרף ללא מעגלים.
ב. G^* הוא גרף קשיר, כי הסילוק של צלע כלשהי ממעגל בגרף קשיר משאירה גרף קשיר.

לכן, G^* הוא עץ על n קודקודים. לכן, $|E(G^*)|=n-1$. אכן $G^*\subseteq G$, ו-$|E(G)|=|E(G^*)|=n-1$, ולכן נובע ש-$G^*=G$. מכאן, G עץ.

$3\Leftarrow$ 1 ו-2:

צ"ל: אם G גרף על n קודקודים עם $n-1$ צלעות ללא מעגלים, אזי G עץ. מספיק להראות שהוא קשיר.
יהיו $V_1,\dots,V_k$ רכיבי הקשירות של G. מכיוון ש-G אינו מכיל מעגלים, כל אחד מרכיבי הקשירות $G[V_i]$ הוא עץ. לכן: $\forall 1\leq i\leq k.\,|E(G[V_i])|=|V_i|-1$.

מכאן, $E(G)=\bigcup_{i=1}^{k}E(G[V_i])$. מקבלים: $n-1\overset{\text{נתון}}{=}|E(G)|=\sum_{i=1}^{k}|E(G[V_i])|=\sum_{i=1}^{k}(|v_i|-1)=|V|-k=n-k$. לכן, $k=1$, כלומר ב- G יש רק רכיב קשירות אחד, כלומר G קשיר.

$1 \Leftarrow 4$:

צ"ל: בכל עץ G , עבור כל זוג קודקודים $u\neq v\in V(G)$ קיים מסלול יחיד המחבר בין u ל- v .

מכיוון ש-G הוא גרף קשיר, קיום המסלול בין u ל- v נובע.

נוכיח כי בין כל שני קודקודים שונים של G יש מסלול אחד לכל היותר. אם זה לא כך, אזי קיימים שני קודקודים u,v ושני מסלולים שונים P_1,P_2 אשר מחברים בין u ל- v . מבין כל זוגות המסלולים הנ"ל, נבחר זוג מסלולים עם מספר קטן ביותר של צלעות. לפי הבחירה של P_1,P_2 , ל- P_1 ו- P_2 אין אף קודקוד משותף מלבד u,v , הרי אחרת יכולנו להחליף את P_1,P_2 בחלקיהם עד לקודקוד החותך הראשון. לכן, האיחוד של P_1,P_2 הוא מעגל ב- G , וזו סתירה!

$4 \Leftarrow 1$:

נתון: ב- G קיים מסלול יחיד בין כל זוג קודקודים. צ"ל: G עץ.

מכיוון שב- G יש מסלול בין כל זוג קודקודים, הקשירות של G נובעת מידית.

נניח בשלילה שקיים מעגל C ב- G . אזי קיימים ב- C שני קודקודים עם שני מסלולים המחברים ביניהם, וזו סתירה!

מש"ל.

<u>הגדרה:</u>

1. צלע בגרף קשיר נקראת **צלע חתך** (או **גשר**) אם הסרתה תגרום לגרף להיות לא קשיר.
2. יהי G גרף. עץ $T\subseteq G$ נקרא **עץ פורש** אם $V(T)=V(G)$.

<u>מסקנה:</u>

1. כל גרף קשיר G עם n קודקודים מכיל בתוכו עץ פורש T עם $n-1$ צלעות.
2. כל צלע בעץ G היא צלע חתך.
3. יהי G עץ, ותהי $e=(u,v)\notin E(G)$ כאשר $u\neq v\in V(G)$. אזי e סוגרת מעגל יחיד ב- G .

<u>הוכחה:</u>

1. נתחיל מ- $G'=G$. כל עוד ב- G' קיים מעגל C , נבחר צלע שרירותית $e\in C$ ונסלקה. נסמן את הגרף הסופי ב- T .
   אזי T הוא גרף קשיר ללא מעגלים, וגם $V(T)=V(G)$, ולכן T הוא עץ פורש של G .
2. אם G עץ על n קודקודים ו- $e\in E(G)$, אזי ב- $G\setminus\{e\}$ יש בדיוק $n-2$ צלעות, ולכן $G\setminus\{e\}$ כבר לא עץ וגם לא גרף קשיר (לפי מסקנה 1). לכן, e היא צלע חתך ב- G .
3. מכיוון ש- $G\setminus\{e\}$ מכיל מסלול יחיד P המחבר בין u ל- v , הוספת e ל- G סוגרת מעגל שהוא $P+e$.

מש"ל.

נוסחת קיילי (*Cayley*)

נגדיר: $f(n)$ - מספר העצים הפורשים בגרף K_n על n קודקודים.

<u>משפט</u> (נוסחת קיילי): מספר העצים על n קודקודים מסומנים הוא n^{n-2} .

<u>הוכחה</u> (*Joyal* - 1981): נסמן ב- t_n את מספר העצים על n קודקודים מסומנים. צ"ל: $t_n=n^{n-3}$. לכל עץ T על n קודקודים, נבחר קודקוד שמאל L וקודקוד ימין R (ייתכן $L=R$), ונסתכל על השלישיות (עץ, קודקוד שמאל, קודקוד ימין), ונסמן את קבוצת השלישיות הנ"ל ב- T_n .

נשים לב: $|T_n|=t_n\cdot n^2$. לכן, די להראות: $|T_n|=n^n$.

אנו נוכיח כי קיימת התאמה חח"ע ועל בין $(T,L,R)\in T_n$ לבין פונקציות $f:[n]\to[n]$. מכיוון שקיימות n^n פונקציות כאלו, ינבע כי $|T_n|=n^n$.

בהינתן פונקציה $f:[n]\to[n]$, נגדיר גרף (מכוון) G_f (שנקרא **גרף מכוון פונקציונלי**) באופן הבא: $V(G_f)=[n]$ ו- $E(G_f)=\{(i,f(i))|1\leq i\leq n\}$. נסתכל על תכונות G_f :

- דרגת היציאה של כל קודקוד היא 1 בדיוק (בעוד דרגת הכניסה יכולה להשתנות).
- בכל רכיב קשירות של G_f , מספר הצלעות שווה למספר הקודקודים, ולכן יש בו מעגל אחד בדיוק. יתרה מזאת, המעגל הזה מכוון (כי דרגת היציאה של כל קודקוד היא 1). שאר הצלעות באותו רכיב קשירות מכוונות לכיוון המעגל.

נתאר דרך להפוך גרף מכוון כזה G_f לעץ על n קודקודים: נסמן ב- M את איחוד קבוצות הקודקודים בכל המעגלים ב- G_f . נשים לב כי פונקציה f המצומצמת לקבוצה M היא חח"ע ועל. נסדר את כל הקודקודים של M : $M=(v_1,\dots,v_k)$, ונרשום את $f|_M$ באופן הבא: $f|_M=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \\ f(v_1) & \cdots & f(v_k)\end{pmatrix}$. עתה, נגדיר: $L=f(v_1)$ ו- $R=f(v_k)$.

ניצור עץ T על בסיס f באופן הבא: ניצור מסלול P כך ש- $P=\{f(v_1),\dots,f(v_k)\}$. עתה, נכניס את שאר הקודקודים $[n]\setminus M$, ונחזיר את השאר הצלעות הנוגעות באותם קודקודים.
נתאר איך, בהינתן שלישיה (T,L,R) , נשחזר את הפונקציה היחידה f אשר נותנת את השלישיה הנ"ל: בעץ T יש מסלול יחיד P המחבר בין L ל- R . לפי אופן הבניה שלנו, הקודקודים של P הם בדיוק הקבוצה M של קודקודי המעגלים ב- G_f . עתה, נסדר את הערכים (קודקודים) בתוך M : $M=\{v_1<\dots<v_k\}$. נניח $P=(L=u_1,\dots,u_k=R)$, ואז $f|M=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \\ u_1 & \cdots & u_k \end{pmatrix}$. את שאר הצלעות של T נכוון כלפי המסלול P . קיבלנו גרף מכוון G_f , וממנו נשחזר את f .
מש"ל.

משפט העצים והמטריצות

<u>טענה</u>: עבור $M=\begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix}_{k\times k}$, מתקיים $\det M=(a-b)^{k-1}(a+(k-1)b)$.

<u>סימונים</u>: יהי $G=(V,E)$ גרף עם קבוצת קודקודים $V=\{1,\dots,n\}$. מטריצת השכנויות $\underset{n\times n}{A}$ של G מוגדרת על ידי $a_{ij}=\begin{cases} 1 & (i,j)\in E \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$. נגדיר: $D=diag(d_1,\dots,d_n)$ כאשר d_i הוא הדרגה של הקודקוד i . כמו כן, נגדיר $L=D-A$, כלומר: $L_{ij}=\begin{cases} d_i & i=j \\ -1 & (i,j)\in E \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$.

<u>משפט העצים והמטריצות</u>: יהי G גרף פשוט על n קודקודים, ותהיינה L,D,A המטריצות כפי שהוגדרו לעיל. אזי מספר העצים הפורשים ב- G שווה לדטרמיננטה של המטריצה L' , המתקבלת מ- L על ידי מחורת השורה ה- i והעמודה ה- i , עבור בחירה כלשהי של i .

<u>הוכחה</u>: נניח בה"כ $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ ו- $E=\{e_1,\dots,e_m\}$ (כלומר $|V|=n$ ו- $|E|=m$).
נכוון את G בצורה שרירותית, ונקבל מזאת גרף מכוון H שהוא הכוונה של G . בהינתן H וסדרים על קבוצת הקודקודים וקבוצת הצלעות של G (ושל H), נגדיר מטריצה $\underset{n\times m}{M}$ באופן הבא: $M_{ij}=\begin{cases} 0 & v_i\notin e_j \\ 1 & e_j \text{ הראש של } v_i \\ -1 & e_j \text{ הזנב של } v_i \end{cases}$.

אזי $L=M\cdot M^t$. מדוע? האיבר ה- ij של MM^t הוא הכפל של שורה i של M בשורה j של M . אם $i=j$, אזי הכפל של שורה i של M בעצמה הוא $d(v_i)$. אם $i\neq j$, אזי הכפל של שורה i של M בשורה j של M שווה ל- $(-1)\cdot 1=-1$ כאשר $(v_i,v_j)\in E$ ול- 0 כאשר $(v_i,v_j)\notin E$. לכן, אכן $(MM^t)_{ij}=L_{ij}$, ואז $L=MM^t$.

<u>טענת עזר</u>: יהי $E_0\subseteq E$ כך ש- $|E_0|=n-1$. תהי B תת מטריצה של M מסדר $(n-1)\times(n-1)$ המתקבלת מ- M על ידי בחירה של $n-1$ העמודות המתאימות לצלעות של E_0 ו- $n-1$ קודקודים שרירותיים. אזי $\det B$ היא:

1. ± 1 כאשר E_0 היא קבוצת צלעות של עץ פורש של G .
2. 0 אחרת.

<u>הוכחה</u>:

1. צ"ל: אם הצלעות של E_0 הן עץ פורש ב- G , אזי $\det B=\pm 1$.
צעד האינדוקציה: E_0 עץ פורש בגרף G , ו- $|E_0|=n-1$, $|V(G)|=n$. מכיוון שבכל עץ פורש על לפחות שני קודקודים יש לפחות שני עלים, אזי גם בעץ E_0 יש לפחות שני עלים. אם v הוא עלה של E_0 , אזי v סמוך לצלע אחת בדיוק e_j של E_0 , ולכן בשורה v של B נראה ± 1 במקום של e_j , ו- 0 בשאר העמודות. מכיוון שביצירת B "מוחקים" רק קודקוד אחד, לפחות אחד העלים של E_0 "שורד" את המחיקה ונשאר במטריצה B . נפתח את $\det B$ לפי השורה של v ונקבל ± 1 מוכפל בדטרמיננטה של המטריצה B' המתקבלת מ- B על ידי מחיקת הקודקוד v והצלע e_j . נזכור כי הסילוק של עלה מעץ משאיר עץ על קודקוד אחד פחות, ולכן המטריצה B' מתאימה לעץ עם $n-2$ צלעות. מכאן, לפי הנחת האינדוקציה, $\det B'=\pm 1$, ולכן $\det B=\pm 1\cdot\det B'=\pm 1$.
2. נניח כי E_0 אינה קבוצת צלעות של עץ פורש של G . אזי ב- E_0 יש מעגל C המורכב מהצלעות $e_{i_1},\dots,e_{i_k}$, הרשומות כאן לפי סדר הופעתן ב- C . נשים לב שאם נקבע את כיוון ההליכה על המעגל, למשל כיוון השעון, וניתן סימנים לעמודות $e_{i_1},\dots,e_{i_k}$ בהתאם לתיאומן עם כיוון ההליכה (כלומר אם צלע e_{i_j} מכוונת בהתאם לכיוון ההליכה, אזי הסימן הוא $+1$, ואחרת הוא -1), נקבל צירוף של העמודות $e_{i_1},\dots,e_{i_k}$ ששווה ל- $\vec{0}$. מכאן, העמודות תלויות לינארית ב- M . לכן, העמודות של $e_{i_1},\dots,e_{i_k}$ תשארנה תלויות לינארית גם במטריצה B ,

ולכן $\det B=0$.
מש"ל (טענה).
<u>משפט קושי-בינה</u> (ללא הוכחה, זהו משפט מחדו"א): יהיו $r\leq m$ שלמים חיוביים, ותהיינה $\underset{r\times m}{A}, \underset{m\times r}{B}$ מטריצות. אזי $\det(A\cdot B)=\sum_{\substack{S\subseteq[m]\\|S|=r}}\det A_S\cdot\det B_S$ כאשר A_S היא תת מטריצה של A בגודל $r\times r$ המתאימה לעמודות השייכות ל- S , ו- B_S היא תת מטריצה של B בגודל $r\times r$ המתאימה לשורות השייכות ל- S .
ראינו כי $L=MM^t$. לכן, אם נסמן ב- L' את המטריצה המתקבלת מ- L אחרי סילוק השורה ה- i והעמודה ה- i , מתקיים: $\underset{(n-1)\times(n-1)}{L'}=\underset{(n-1)\times m}{M'}\cdot\underset{m\times(n-1)}{(M')^t}$, כאשר M' מתקבלת מ- M אחרי סילוק השורה ה- i .
לכן, לפי משפט קושי-בינה: $\det L'=\sum_{\substack{E_0\subseteq E\\|E_0|=n-1}}\det(M_{E_0}')\cdot\det(M_{E_0}')^t=\sum_{\substack{E_0\subseteq E\\|E|=n-1}}(\det M_{E_0}')^2$. מטענת העזר, $\det M_{E_0}'$ הוא ±1 אם E_0 הוא עץ פורש, ו- 0 אחרת. לכן: $\det L'=\sum_{\substack{E_0\subseteq E\\|E_0|=n-1\\ \text{עץ פורש } E_0}}1$.
מכאן, זהו בדיוק מספר העצים הפורשים ב- G .
מש"ל.

קשירות

<u>הגדרות:</u>

1. גרף $G=(V,E)$ נקרא **קשיר** אם לכל זוג קודקודים שונים $u,v\in V$ קיים מסלול ב- G אשר מחבר בין u לבין v .
2. קבוצת קודקודים S של גרף $G=(V,E)$ נקראת **חתך קודקודי** אם הגרף $G\setminus S$ אינו קשיר, או עם קודקוד אחד בלבד.
   אם $S=\{v\}$ חתך קודקודי, אזי v נקרא **קודקוד חתך** של G .
3. יהי $0<k\in\mathbb{Z}$. גרף $G=(V,E)$ יקרא **k-קשיר (קודקודית)** אם בכל חתך קודקודי S של G יש לפחות k קודקודים.
4. **הקשירות** של G , המסומנת ב- $\kappa(G)$, היא k מקסימלי עבורו G הוא k-קשיר.
   באופן שקול: הגודל המזערי של חתך קודקודי ב- G .

קשירות ודרגות

<u>טענה:</u> לכל גרף G מתקיים: $\kappa(G)\leq\delta(G)$.
<u>הוכחה:</u> עבור $v\in V(G)$ נסמן $N(v)=\{u\in V(G)|(u,v)\in E(g)\}$ – ה**שכנים** של v . נשים לב: הקבוצה $N(v)$ היא חתך קודקודי (כי היא מנתקת את v משאר הגרף).
מכאן, $\forall v\in V(G).\kappa(G)\leq|N(v)|=d(v)$, ולכן $\kappa(G)\leq\delta(G)$.
מש"ל.
<u>הערה:</u> הכיוון ההפוך אינו נכון: $\delta(G)$ גבוהה אינה מבטיחה קשירות גבוהה. למשל, אם G הוא איחוד זר של שתי קליקות K_n , אזי $\delta(G)=n-1$, ו- G לא קשיר.
<u>הגדרה:</u> יהי G גרף. **הדרגה הממוצעת** של G היא $\bar{d}(G)=\frac{1}{|V(G)|}\cdot\sum_{v\in V(G)}d(v)$.
<u>משפט</u> ($Mader$): לכל $0\leq k\in\mathbb{Z}$, כל גרף G מדרגה ממוצעת לפחות $4k$ מכיל תת גרף G' שהוא k-קשיר.
<u>הוכחה:</u> המשפט נכון טריביאלית עבור $k\in\{0,1\}$, ולכן נניח $k\geq2$. נשים לב שתנאי המשפט ($\bar{d}(G)\geq4k$) גורר את המסקנות הבאות:

1. $|V(G)|\geq2k-1$: $\bar{d}(G)\geq4k$, ולכן ב- G קיים קודקוד v ולו לפחות $4k$ קודקודים שכנים, ומכאן ב- G יש לפחות $2k-1<4k+1$ קודקודים.
2. $|E(G)|\geq(2k-3)\cdot(|V(G)|-k+1)+1$: נתון $\frac{2|E(G)|}{|V(G)|}=\bar{d}(G)\geq4k$. לכן, $|E(G)|\geq2k\cdot|V(G)|\geq(2k-3)\cdot(|V(G)|-k+1)+1$ (כי $k\geq2$).

בעזרת נתונים אלה, נוכיח טענה חזקה יותר: אם G מקיים את 1 ו-2 לעיל, אזי G מכיל תת גרף k-קשיר G' . ההוכחה היא באינדוקציה.
בסיס האינדוקציה – $|V(G)|=2k-1$. אזי $|E(G)|\geq(2k-3)\cdot(2k-1-k+1)+1=(2k-3)k+1\overset{\text{אלגברית}}{=}\binom{2k-1}{2}$. לכן, נובע כי G למעשה הוא גרף שלם על $2k-1$ קודקודים, ולכן $\kappa(G)=2k-2\geq k$, ונוכל לקחת $G'=G$.
צעד האינדוקציה: נניח כי G גרף על n קודקודים אשר מקיים את תנאים 1 ו-2, ונניח כי הטענה נכונה עבור כל גרף עם פחות מ- n קודקודים.

מקרה 1: ב- G קיים קודקוד v עבורו $d(v)\le 2k-3$. במקרה כזה, נגדיר: $G_0=G\setminus\{v\}$, ואז:

א. $|V(G_0)|=|V(G)|-1=n-1$.

ב. $|E(G_0)|=|E(G)|-d_G(v)\ge(2k-3)(n-k+1)+1-(2k-3)=(2k-3)((n-1)-k+1)+1$.

מכאן, G_0 מקיים את תנאים 1 ו-2, ולכן לפי הנחת האינדוקציה, ב- G_0 קיים תת גרף G' שהוא k-קשיר, ואז G' הוא הגרף המבוקש.

מקרה 2: $d(v)\ge 2k-2$ לכל $v\in V(G)$. אם G עצמו k-קשיר, סיימנו. לכן, נוכל להניח כי G אינו k-קשיר.

יהי S חתך קודקודי ב- G עם $|S|=k-1$. לכן, ב- G קיימות שתי קבוצות, V_1,V_2 כך ש- $V_1\cap V_2=\emptyset$, $V_1\cup V_2=V(G)$ וב- G אין אף צלע המחברת בין $V_1\setminus S\neq\emptyset$ ובין $V_2\setminus S\neq\emptyset$ (נבחר ככה).

יהי $v\in V_1\setminus S$. אזי $d(v)\ge 2k-2$, וכל השכנים של v נמצאים ב- V_1. לכן, $|V_1|\ge d(v)+1\ge 2k-1$.

באופן דומה מראים ש- $|V_2|\ge 2k-1$.

נגדיר: $G_1=G[V_1]$ (תת הגרף הנפרש על ידי V_1) ו- $G_2=G[V_2]$. אזי G_1,G_2 הם לפחות על $2k-1$ קודקודים.

אם $|E(G_i)|>(2k-3)(|V_i|-k+1)$, אז נפעיל אינדוקציה על G_i ונמצא תת גרף k-קשיר G' של G_i, ולכן הוא גם תת גרף של G.

לכן, נוכל להניח כי $|E(G_i)|\le(2k-3)(|V_i|-k+1)$. אבל

$$|E(G)|\le|E(G_1)|+|E(G_2)|\le(2k-3)(|V_1|-k+1)+(2k-3)(|V_2|-k+1)=$$
$$=(2k-3)(|V_1|+|V_2|-2k+2)=(2k-3)(|V(G)|+|S|-2k+2)=(2k-3)(|V(G)|-k+1)$$

זו סתירה, כי הנחנו $|E(G)|>(2k-3)(|V(G)|-k+1)$.

מש"ל.

קשירות צלעית

<u>הגדרות</u>:

1. יהי $G=(V,E)$ גרף. קבוצת צלעות $F\subseteq E$ נקראת **קבוצה מפרידה** אם $G\setminus F$ אינו קשיר.
2. גרף G הוא **k-קשיר צלעית** אם $|F|\ge k$ לכל קבוצה מפרידה $F\subseteq E(G)$.
3. **הקשירות הצלעית** של הגרף G, המסומנת ב- $\kappa'(G)$, הוא k מרבי עבורו G הוא k-קשיר צלעית.
באופן שקול: $\kappa'(G)=\min\{|F| \mid F\subseteq E(G)$ קבוצה מפרידה$\}$.
4. יהי $G=(V,E)$ גרף, ותהי $\emptyset\neq S\subset V$ (הכלה ממש) קבוצת קודקודים. ה**חתך** $[S,\bar{S}]$ מוגדר כך: $[S,\bar{S}]=\{(u,v)\in E \mid u\in S, v\in\bar{S}\}$, כלומר $[S,\bar{S}]$ הוא אוסף כל הצלעות של G בין S ל- $\bar{S}$.

<u>טענה</u>: כל קבוצת צלעות מפרידה F בגרף G מכילה בתוכה חתך $[S,\bar{S}]$.

<u>הוכחה</u>: מכיוון ש- F קבוצה מפרידה, היא מפרידה בין שתי קבוצות קודקודים $S\subseteq V(G)$ ו- $\bar{S}\subseteq V(G)$, כאשר $\emptyset\neq S\subset V$. לכן, כל הצלעות של G בין S ל- $\bar{S}$ חייבות להימצא בתוך F, ולכן $[S,\bar{S}]\subseteq F$. מש"ל.

<u>מסקנה</u>: כל קבוצה מפרידה מינימלית לפי הכלה היא חתך.

<u>משפט</u> (*Whitney*): לכל גרף G עם $|V(G)|\ge 2$ מתקיים $\kappa(G)\le\kappa'(G)\le\delta(G)$.

<u>הוכחה</u>:

$\kappa'(G)\le\delta(G)$:

יהי $v\in V(G)$. נגדיר: $S=\{v\}$. אזי הקבוצה $[S,\bar{S}]$ היא חתך המכיל את הצלעות של G הסמוכות ל- v, ומתקיים $|[S,\bar{S}]|=d_G(v)$, ולכן $\kappa'(G)\le d_G(v)$. זה נכון לכל $v\in V(G)$, ולכן $\kappa'(G)\le\delta(G)$.

$\kappa(G)\le\kappa'(G)$:

יהי $[S,\bar{S}]$ חתך מינימלי ב- G כך ש- $|[S,\bar{S}]|=k=\kappa'(G)$.

מקרה 1: לכל u in S ולכל $v\in\bar{S}$ מתקיים $(u,v)\in E(G)$. אזי $\kappa'(G)=|[S,\bar{S}]|=|S|\cdot|\bar{S}|=|S|\cdot|n-S|$ כאשר $n=|V|(G)$.

מצד שני, $\kappa(G)\le n-1$. לכן, $\kappa(G)\le\kappa'(G)$.

מקרה 2: קיימים קודקודים $u\in S$ ו- $v\in\bar{S}$ כך ש- $(u,v)\notin E(G)$. נגדיר: $A=\{w\in\bar{S} \mid (u,w)\in E(G)\}$ (כלומר A היא קבוצת השכנים של u ב- $\bar{S}$), ונגדיר: $B=\{u\neq w\in S \mid$ ל- w יש שכן ב- $\bar{S}\}$.

נשים לב כי הוצאת $A\cup B$ מהגרף G מנתקת את הקודקוד u מהקודקוד v, ולכן $A\cup B$ הוא אכן חתך קודקודי.

נשים לב כי בחתך $[S,\bar{S}]$ נמצאות הצלעות בין u ל- A ($|A|$ במספרן), ובנוסף הצלעות בין B ל- $\bar{S}$ (לפחות $|B|$ במספרן).

מכאן: $\kappa'(G)=|[S,\bar{S}]|\ge|A|+|B|=|A\cup B|$. מכיוון ש- $A\cup B$ הוא חתך קודקודי, $\kappa(G)\le\kappa'(G)$.

מש"ל.

<u>הגדרה</u>: יהי $G=(V,E)$ גרף, ותהי $e_0=(u,v)\in E$. **הכיווץ** $G|_{e_0}$ מוגדר באופן הבא: $V(G|_{e_0})=V(G)\cup\{v_{e_0}\}\setminus\{u,v\}$ ו- $E(G|_{e_0})=\{e\in E(G) \mid e\cap\{u,v\}=\emptyset\}\cup\{(w,v_{e_0}) \mid$ ל- w יש שכן ב- $\{u,v\}\}$.

<u>משפט</u> (מנגר – *Menger*): יהי $G=(V,E)$ גרף, ותהיינה $A\neq B\subseteq V$ קבוצות קודקודים. אזי המספר המינימלי

של קודקודים אשיר מפריד בין A ל-B שווה למספר המקסימלי של מסלולים זרים בין A ל-B.
<u>הערות</u>:
1. A ל-B ו-B מותר להיחתך. אם $x\in A\cap B$, אזי x הוא מסלול (באורך 0) מ-A ל-B.
2. קבוצה X **מפרידה** בין A ל-B ב-G אם ב-$G\setminus X$ אין מסלול מ-$A\setminus X$ ל-$B\setminus X$.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על $|E|$.
בסיס האינדוקציה – $|E|=0$: במקרה כזה, ניתן להפריד בין A ל-B על ידי סילוק קבוצה $X=A\cap B$. כמו כן, כל קודקוד $x\in A\cap B$ הוא בעצמו מסלול (באורך 0) בין A ל-B, ולכן ב-G קיימים בדיוק $|A\cap B|$ מסלולים זרים מ-A ל-B. לכן, הטענה נובעת.
צעד האינדוקציה: נסמן ב-$k=k(G,A,B)$ את הגודל המינימלי של קבוצת קודקודים ב-G המפרידה בין A ל-B. כמו כן, נסמן ב-$\ell=\ell(G,A,B)$ את המספר המקסימלי של מסלולים זרים בין A ל-B. צ"ל: $k=\ell$.
אם $p_1,\ldots,p_\ell$ אוסף מסלולים זרים בין A ל-B, ו-$X\subseteq V$ קבוצה מפרידה בין A ל-B, אזי $|X\cap p_i|\geq 1$, ולכן $|X|\geq\ell$, ומכאן $k\geq\ell$.
נניח בשלילה כי ב-G אין k מסלולים זרים (בקודקודים) בין A ל-B. תהי $e=(x,y)$ צלע שרירותית ב-G, ונתבונן בגרף $G'=G|e$. נעדכן את הקבוצות A ו-B ב-G' באופן הבא: אם $\{x,y\}\cap A\neq\emptyset$, אזי נגדיר $A'=A\cup\{v_e\}\setminus\{x,y\}$, ואחרת $A'=A$. באופן דומה נגדיר את B'.
קל לראות כי ב-G' אין k מסלולים זרים בין A' ל-B' (כי אם היו כאלה, ניתן היה להפוך אותם ל-k מסלולים בין A ל-B ב-G). לכן, לפי הנחת האינדוקציה, ב-G' ניתן להפריד בין A' ל-B' על ידי קבוצת קודקודים Y בגודל $|Y|\leq k-1$.
אם $v_e\notin Y$, אזי Y מפרידה גם בין A ל-B ב-G, בסתירה להגדרת k. לכן, $v_e\in Y$. מכאן, הקבוצה $X=Y\cup\{x,y\}\setminus\{v_e\}$ היא קבוצה מפרידה בין A ל-B, ו-$|X|\leq k$ (למעשה אפשר להניח כי $|X|=k$).
הוכחנו כי קיימת קבוצה מפרידה $X\subseteq V$ בגודל k כך ש-$e=(x,y)\in X$ עבור $e\in E(G)$.
נגדיר גרף חדש $G''=G\setminus\{e\}$. נפעיל את הנחת האינדוקציה על G''. כל קבוצה מפרידה S בין A ל-X ב-G'' מפרידה בין A ל-X ב-G. לכן, ב-S יש לפחות k קודקודים. לכן, לפי הנחת האינדוקציה על G'', ב-G'' יש k מסלולים זרים בין A ל-X. באופן דומה, נקבל שב-G'' יש k מסלולים זרים בין B ל-X.
עתה, נדביק את k המסלולים בין A ל-X ל-k המסלולים בין B ל-X בנקודות של X (נזכור כי $|X|=k$).
נקבל k מסלולים זרים בין A ל-B ב-G'', ולכן גם ב-G. סתירה!
מש"ל.
<u>הגדרה</u>: בהינתן גרף $G=(V,E)$, **הגרף הקווי** (או **גרף הצלעות**) של G, המסומן ב-$L(G)$, מוגדר באופן הבא: $V(L(G))=E(G)$ ו-$E(L(G))=\{(e_1,e_2)\in E(G)|e_1\cap e_2\neq\emptyset\}$.
<u>מסקנה 1</u>: יהיו $a\neq b$ קודקודים בגרף G. אזי:
1. אם $(a,b)\notin E(G)$, אזי המספר המינימלי של קודקודים ב-$G\setminus\{a,b\}$ אשר מפריד בין a ל-b שווה למספר המקסימלי של מסלולים זרי פנים בין a ל-b.
2. המספר המינימלי של צלעות אשר מפריד בין a ל-b שווה למספר המקסימלי של מסלולים זרי צלעות בין a ל-b.

<u>הוכחה</u>:
1. נפעיל את משפט מנגר לקבוצות $A=N_G(a)$ ו-$B=N_G(b)$. נקבל כרצוי.
2. נסתכל על גרף הצלעות $L(G)$, ונשתמש במשפט מנגר עליו ועל הקבוצות $a=\{e\in E(g)|a\in e\}$ ו-$B=\{e\in E(G)|b\in e\}$.

מש"ל.
<u>מסקנה 2</u>: יהי $G=(V,E)$ ותהי $B\subseteq V$ קבוצת קודקודים, ויהי $a\in V\setminus B$ קודקוד מחוץ ל-B. אזי המספר המינימלי של קודקודים אשר מפרידים בין a ל-B שווה למספר המקסימלי של מסלולים זרים (מחוץ ל-a) מ-a ל-B.
<u>הוכחה</u>: נפעיל את משפט מנגר על G עם הקבוצות $A=N_G(a)$ ו-B. מש"ל.
<u>משפט</u> (הכללת משפט מנגר):
1. גרף G הוא k-קשיר $\Leftrightarrow$ קיימים k מסלולים זרי פנים בין כל זוג קודקודים שונים $a\neq b\in V(G)$.
2. גרף G הוא k-קשיר צלעית $\Leftrightarrow$ קיימים k מסלולים זרי צלעות בין כל זוג קודקודים $a\neq b\in V(G)$.

<u>הוכחה</u>:
1. $\Rightarrow$: נניח שקיימים k מסלולים זרים בין כל a ל-$b\neq a$. צ"ל: G k-קשיר. נניח ש-$T\subseteq V(G)$ ו-$|T|=k-1$, ויהי $a\neq b\in T$. אזי ב-G יש k מסלולים זרי פנים מ-a ל-b, ולכן מכיוון ש-$|T|=k-1$, T נוגעת בלכל היותר $k-1$ מהם, ולכן קיים מסלול אחד לפחות גם ב-$G\setminus T$, ואז $G\setminus T$ קשיר. לכן, $\kappa(G)\geq k$, ולכן G הוא k-קשיר.

$\Leftarrow$: נניח ש-G k-קשיר. צ"ל: ב-G קיימים k מסלולים זרי פנים בין כל $a\neq b\in V(G)$. יהיו $a\neq b\in V(G)$.
נניח תחילה כי $(a,b)\notin E(G)$. מכיוון ש-G הינו k-קשיר, יש להשקיע לפחות k קודקודים ב-G על

מנת להפריד בין a ל-b, ולכן לפי מסקנה 1, ב-G קיימים k מסלולים בין a ל-b.
נניח אם כן כי $(a,b)\in E(G)$. נוציא אותה: $G'=G\setminus(a,b)$. נניח בשלילה כי ב-G אין k מסלולים זרים בין a ל-b. אזי ב-G' יש לכל היותר $k-2$ מסלולים בין a ל-b, ולכן לפי מסקנה 1 (חלק 1), ב-G' קיימת קבוצה $X\subseteq V(G')$ כך ש-$|X|\le k-2$ המפרידה בין a ו-b. מכיוון ש-G הוא k-קשיר, ב-G יש לפחות $k+1$ קודקודים, ולכן ב-G קיים קודקוד $v\notin X\cup\{a,b\}$. מכיוון ש-X קבוצה מפרידה, X מפרידה ב-G' את v מ-a או מ-b. נניח בה"כ ש-X מפרידה את v מ-a ב-G'. אבל אז הקבוצה $X'=X\cup\{b\}$ היא קבוצה של לכל היותר $k-1$ קודקודים אשר מפרידה בין a ל-v ב-G. זוהי סתירה לכך ש-G הוא גרף k-קשיר.

2. מוכיחים באופן דומה תוך שימוש במסקנה 1 (חלק 2).

מש"ל.

<u>מעגלי אוילר</u>

<u>הגדרות</u>:

1. יהי $G=(V,E)$ גרף. הילוך סגור W ב-G אשר עובר דרך כל צלע $e\in E$ בדיוק פעם אחת נקרא **מעגל אוילר** $(Euler)$.
2. (מולטי-)גרף G בו קיים מעגל אוילר נקרא (**מולטי-**)**גרף אוילריאני**.

<u>משפט</u> (אוילר): יהי G מולטי-גרף קשיר. אזי G הוא אוילריאני $\Leftrightarrow$ כל דרגות הקודקודים ב-G הן זוגיות.

<u>הוכחה</u>:

$\Leftarrow$: נניח שב-G קיים מעגל אוילר. יהי W מעגל אוילר. נסתכל על W כעל הילוך מכון (מהקודקוד הראשון עד הקודקוד האחרון). W מבקר בכל קודקוד v של G כי G קשיר. נניח ש-W מבקר ב-v בדיוק k פעמים. אזי W מכיל בדיוק $2k$ צלעות אשר מכילות את v, ואלו הן כל צלעות G אשר מכילות את v, כי W מעגל אוילר. מכאן: $d(v)=2k$, ולכן ל-v דרגה זוגית.

$\Rightarrow$: נניח שכל דרגות קודקודי G זוגיות. יהי W הילוך ב-G עם מספר מקסימלי של צלעות (שבו כל צלע מופיעה לכל היותר פעם אחת). נרשום: $W=v_1e_1 dotaxis\, e_{k-1}v_k$. נראה ש-$W$ מכיל כל צלע של G.

נניח בשלילה שלא. מכיוון ש-W הילוך באורך מקסימלי, כל צלע שנוגעת ב-v_k מופיעה ב-W. אבל לכל כניסה של W לתוך v_k מתאימה יציאה מ-v_k, ולכן חייב להיות $v_1=v_k$ (מכיוון ש-$d(v_k)$ זוגית).

כעת, אם W לא מכיל צלע מסוימת של G, אזי מכיוון ש-G הוא קשיר, קיימת צלע e שלא שייכת ל-W, ולה קודקוד משותף (אחד לפחות) עם W, נניח שהוא v_i. מכיוון ש-W הילוך סגור, נוכל לחשוב על W כעל הילוך אשר מתחיל ב-v_i. אזי נוכל ליצור הילוך ארוך יותר W' על ידי הוספת הצלע e בהתחלה של W, בסתירה לבחירת W.

מש"ל.

מעגלי המילטון

<u>הגדרות</u>:

1. **מעגל המילטון** בגרף G הוא מעגל העובר דרך כל הקודקודים של G.
2. גרף G בו קיים מעגל המילטון נקרא **גרף המילטוני**.

<u>הערה</u>: הקשר בין מעגל המילטון למעגל אוילר: מעגל אוילר בגרף G מתאים למעגל המילטון בגרף הצלעות $L(G)$.

<u>סימון</u>: עבור גרף G, נסמן ב-$C(G)$ את מספר רכיבי הקשירות של G. בפרט, $C(G)=1$ $\Leftrightarrow$ G קשיר.

<u>טענה</u>: אם G המילטוני, אזי G 2-קשיר.

<u>הוכחה</u>: יהי C מעגל המילטון ב-G. אזי C עצמו משרה גרף 2-קשיר ב-G. מש"ל.

<u>הגדרה</u>: גרף G המקיים $|S|\ge C(G\setminus S)$ לכל $\emptyset\ne S\subseteq V(G)$ נקרא **גרף קשיח**.

<u>משפט</u>: אם G גרף המילטוני, אזי G קשיח.

<u>הוכחה</u>: יהי C מעגל המילטון ב-G. נסתכל עליו כעל מעגל מכוון. תהי $\emptyset\ne S\subseteq V(G)$. נניח כי $C_1,\dots,C_k$ רכיבי הקשירות של $G\setminus S$.

לפי הגדרת רכיבי הקשירות, כל צלע של G שיוצאת מ-C_i חייבת להגיע אל S. לכן, כאשר המעגל C עוזב את C_i הוא מגיע ל-S.

יתרה מזאת, קודקודי ההגעה האלה הם שונים זה מזה, כי ב-C דרגת הכניסה ודרגת היציאה הן 1, ולכן מספר הקודקודים ב-S הוא לפחות k.

מש"ל.

<u>מסקנה</u>: אם $G=(A,B,E)$ דו צדדי המילטוני, אזי $|A|=|B|$.

<u>הוכחה</u>: אם $|B|\ge|A|$, אזי $|A|\ge C(G\setminus A)=|B|$, ולכן $|A|=|B|$. מש"ל.

תנאים מספיקים לקיום מעגל המילטון

<u>משפט</u> $(Dirac)$: יהי G גרף על $n\ge 3$ קודקודים שבו $\delta(G)\ge\frac{n}{2}$. אזי G המילטוני.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה כי קיים גרף G_0 על $n\ge 3$ קודקודים בו $\delta(G)\ge\frac{n}{2}$, אבל G_0 אינו המילטוני.

נתחיל ב- $G=G_0$, וכל עוד קיים זוג $u,v\in V(G)$ כך ש- $u\neq v$ ו- $(u,v)\notin E(G)$ ו- $G+(u,v)$ עדיין לא המילטוני, נעדכן: $G=G+(u,v)$.
בסוף התהליך נקבל גרף G על n קודקודים בעל התכונות הבאות:

1. $\delta(G)\geq\frac{n}{2}$.
2. ב- G אין מעגל המילטון.
3. לכל $(u,v)\notin E(G)$, הגרף $G+(u,v)$ המילטוני (כלומר G הוא דוגמה נגדית מקסימלית).

מכיוון ש- $|V(G)|\geq3$ וב- G אין מעגל המילטון, ב- G קיימים זוגות אשר לא מחוברים בצלע. יהיו $u,v\in V(G)$ שונים כך ש- $(u,v)\notin E(G)$.
לפי הגדרת G , הוספת (u,v) ל- G סוגרת מעגל המילטון, ולכן ב- G קיים מסלול P מ- u ל- v העובר דרך כל קודקודי G . נניח כי הסדר של קודקודי G על P הוא $P=(u=v_1,\ldots,v_n=v)$.
נגדיר: $S=\{1\leq i<n|(v_1,v_{i+1})\in E(G)\}$ ו- $T=\{1\leq i<n|(v_i,v_n)\in E(G)\}$. נשים לב ש:

1. $S,T\subseteq\{1,\ldots,n-1\}$.
2. $|S|=d(v_1)$, $|T|=d(v_n)$.

לכן, מכיוון ש- $\delta(G)\geq\frac{n}{2}$, נובע כי $|S|,|T|\geq\frac{n}{2}$. מ-1 נקבל ש- $S\cap T\neq\emptyset$.
אם כן, יהי $i\in S\cap T$. אזי G מכיל את הצלעות $(v_1,v_{i+1})I-(v_i,v_n)$, ואז G מכיל מעגל המילטון: $v_1Pv_iv_nPv_{i+1}v_1$, בסתירה להגדרת G .
מש"ל.
<u>הערות:</u>

1. תנאי המשפט $\delta(G)\geq\frac{n}{2}$ הוא הדוק.

<u>דוגמאות:</u>

א. $n=2k+1$ ו- $G=K_{k,k+1}$. אזי G לא המילטוני עם $\delta(G)=k=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$.

ב. $n=2k+1$, והגרף הוא איחוד זר של שני K_{k+1} (כאשר רק אחד הקודקודים שלהם משותף). אזי $\delta(G)=k=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$.

2. נשים לב כי בהוכחה יכולנו במקום התנאים $\delta(G)\geq\frac{n}{2}$ להסתפר בתנאי מוחלש: $|S|+|T|\geq n$ ו- $d(u)+d(v)\geq n$ כאשר $(u,v)\notin E(G)$. קיבלנו, אם כן, את התנאי הבא להמילטונים:

<u>משפט</u> (Ore): יהי G גרף על $n\geq3$ קודקודים שבו $d(u)+d(v)\geq n$ לכל $u,v\in V(G)$ שונים המקיימים $(u,v)\notin E(G)$. אזי G המילטוני.
<u>טענה:</u> יהי G גרף מדרגה מינימלית $\delta(G)\geq2$. אזי G מכיל מעגל C באורך לפחות $\delta(G)+1$.
<u>הוכחה:</u> יהי P המסלול הארוך ביותר בגרף G . נרשום: $P=(v_1,\ldots,v_k)$. נשים לב כי כל צלע (v_1,v_i) כאשר $i\geq3$ סוגרת מעגל באורך i , יחד עם P . נסתכל על כל הצלעות $(v_1,v_i)\in E(G)$ (עבור $i\geq3$) – מספרן $d(v_1)-1$. מתקיים: $d(v_1)-1\geq\delta(G)-1$. נגדיר: $i^*=max\{i\geq3|(v_1,v_i)\in E(G)\}$. אזי $i^*\geq d(v)-1\geq\delta(v)-1$, ולכן קיבלנו מעגל $C=(v_1,\ldots,v_i,v_1)$ שאורכו לפחות $\delta(G)+1$. מש"ל.
<u>הגדרות:</u>

1. **קבוצה בלתי תלויה** (ב"ת) ב- G היא קבוצה שלא מכילה אף צלע ב- G .
2. **מספר האי תלות** של G , המסומן ב- $\alpha(G)$, הוא הגודל המקסימלי של קבוצה ב"ת ב- G .

<u>משפט</u> $(Chvátal\ Erdős)$: יהי G גרף על לפחות 3 קודקודים עבורו $\alpha(G)\leq\kappa(G)$. אזי G המילטוני.
<u>הוכחה:</u> אם $\kappa(G)=1$ אזי $\alpha(G)=1$, ולכן G הוא למעשה גרף שלם על $n\geq3$ קודקודים, ואז $\kappa(G)=n-1>1$, בסתירה. לכן, נוכל להניח כי $\kappa(G)\geq2$.
נזכור כי $\kappa(G)\leq\delta(G)$, ולכן הדרגה המינימלית של G היא לפחות $\kappa(G)$. נסמן: $\kappa(G)=k\geq2$, ולכן $\delta(G)\geq k\geq2$.
לכן, לפי הטענה, ב- G קיים מעגל באורך לפחות $k+1$. יהי X המעגל הארוך ביותר ב- G (אזי ב- C יש לפחות $k+1$ קודקודים). נוכיח: C מעגל המילטון.
נניח בשלילה כי C אינו מעגל המילטון. נתבונן בגרף $G\setminus V(C)$. יהי H רכיב קשירות של $G\setminus V(C)$. מכיוון ש- G הוא k -קשיר ו- $|C|\geq k+1$, ל- H יש לפחות k שכנים על C (כי אחרת ניתן לסלק את לכל היותר $k-1$ השכנים של H על C , ובזאת לנתק את H מ- C).
תהי $\{u_1,\ldots,u_k\}$ קבוצת k -שכנים של H על C . לכל $1\leq i\leq k$, נסמן ב- a_i את הקודקוד העוקר אחרי u_i לאורך המעגל C . בנוסף, נבחר קודקוד שרירותי $w\in H$. נסמן: $I=\{a_1,\ldots,a_k,w\}$.

נוכיח כי I קבוצה ב"ת:

1. $(a_i,a_j)\notin E(G)$: נניח בשלילה ש- $(a_i,a_j)\in E(G)$. יהיו w_i,w_j השכנים של u_i,u_j בהתאמה בתוך H (ייתכן כי $w_i=w_j$). אזי G מכיל מעגל C' הבנוי בצורה הבאה:
   1. מ- u_i ל- a_j לאורך C.
   2. (a_j,a_i).
   3. מ- a_i ל- u_j לאורך C.
   4. (u_j,w_j).
   5. מסלול בתוך H מ- w_j ל- w_i.
   6. (w_i,u_i).

   מכיוון ש- C' מכיל את כל קודקודי C ובנוסף קודקוד אחד לפחות מ- H, הוא ארוך יותר מ- C, בסתירה!
2. $(a_i,w)\notin E(G)$: נניח בשלילה ש- $(a_i,w)\in E(G)$. יהי w_i שכן של u_i בתוך H. אזי נבנה מעגל C'' באופן הבא:
   1. מ- u_i ל- a_i לאורך C (לא דרך הצלע (u_i,a_i)).
   2. (a_i,w).
   3. מסלול בתוך H מ- w ל- w_i.
   4. (w_i,u_i).

   אזי C'' ארוך יותר מ- C, בסתירה!

לכן, $I=\{a_1,\dots,a_k,w\}$ היא קבוצה ב"ת בגודל $|I|=k+1$, וקיבלנו $\alpha(G)\geq|I|=k+1>k=\kappa(G)$, בסתירה להנחה $\kappa(G)\geq\alpha(G)$. לכן, C מעגל המילטון.
מש"ל.

<u>זיווגים וכיסויים בגרפים</u>

<u>הגדרות:</u>

1. יהי $G=(V,E)$ גרף. אוסף צלעות $M\subseteq E$ נקרא **זיווג** ב- G אם מתקיים $e\cap e'=\emptyset$ לכל $e,e'\in M$ שונות (כלומר M הוא אוסף של צלעות זרות בזוגות).
2. יהי $G=(V,E)$ גרף. **מספר הזיווג** של G, המסומן ב- $\nu(G)$, הוא הגודל המקסימלי של זיווג ב- G.
3. יהי $G=(V,E)$ גרף. אוסף קודקודים $T\subseteq V$ נקרא **כיסוי** של G אם $e\cap T\neq\emptyset$ לכל $e\in E$.

   <u>הערה:</u> $T\subseteq V(G)$ כיסוי ב- G $\Leftrightarrow$ $V\setminus T$ היא קבוצה ב"ת ב- G.
4. יהי $G=(V,E)$ גרף. **מספר הכיסוי** של G, המסומן ב- $\tau(G)$, הוא הגודל המינימלי של כיסוי ב- G.

   <u>הערה:</u> לכל G מתקיים: $\tau(G)=|V(G)|-\alpha(G)$.

<u>טענה:</u> לכל גרף G מתקיים: $\nu(G)\leq\tau(G)\leq2\nu(G)$.

<u>הוכחה:</u>

$\boldsymbol{\nu(G)\leq\tau(G)}$:
יהי M זיווג ב- G בגודל $|M|=\nu(G)$. יהי T כיסוי ב- G בגודל $|T|=\tau(G)$. מכיוון ש- T חותך כל צלע $e\in M$, ומכיוון שהצלעות של M זרות, T משיר לפחות $|M|$ קודקודים על M, ולכן $|T|\geq|M|$.

$\boldsymbol{\tau(G)\leq2\nu(G)}$:
יהי M זיווג מקסימלי לפי הכלה. אזי $|M|\leq\nu(G)$, וכל צלע $e\notin M$ נחתכת עם צלע $e'\in M$ (כי אחרת ניתן להוסיף את e' ל- M וליצור זיווג גדול יותר בסתירה לבחירת M). מכאן, קבוצת הקודקודים של G על הצלעות של M היא כיסוי ב- G בגודל $2|M|\leq2\nu(G)$. לכן, $\tau(G)\leq2\nu(G)$.
מש"ל.

זיווגים בגרפים דו צדדיים

<u>הגדרה:</u> יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי. זיווג M ב- G **מרווה** צד A אם $|M|=|A|$.

תנאי הול ומשפט הול

<u>תנאי הול:</u> יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי. תנאי הול עבור צד A: לכל $\emptyset\neq S\subseteq A$ מתקיים $|N_G(S)|\geq|S|$.

<u>משפט</u> (הול – $Hall$): יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי. אזי ב- G קיים זיווג M המרווה את A $\Leftrightarrow$ G מקיים את תנאי הול.

<u>הוכחה:</u>

$\Leftarrow$: נניח כי ב- G קיים זיווג M המרווה את A. נניח כי $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ ו- $M=\{(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)\}$.
תהי $\emptyset\neq S\subseteq A$. אזי הקבוצה $E=\{b_i|a_i\in S\}$ מקיימת $|W|=|S|$ ו- $W\subseteq N_G(S)$. מכאן $|N_G(S)|\geq|S|$, ולכן G מקיים את תנאי הול.

$\Rightarrow$: נניח כי G מקיים את תנאי הול עבור A. נוכיח כי קיים זיווג מרווה באינדוקציה על $|A|$.
בסיס האינדוקציה – $|A|=1$: נרשום $A=\{a\}$. לפי תנאי הול המופעל על $S=A=\{a\}$, ל- a קיים שכן $b\in B$. אזי ניקח $M=\{(a,b)\}$ וסיימנו.

צעד האינדוקציה: נניח שהוכחנו שהתנאי הוא מספיק לכל הגרפים הדו צדדיים עם פחות מ- $|A|$ קודקודים.
נוכיח עבור G :
מקרה 1: לכל $\emptyset\neq S\subset A$ (הכלה ממש) מתקיים $|N_G(S)|>|S|$.
במקרה כזה, ניקח צלע שרירותית $e\in\{a,b\}\in E$, ונגדיר גרף $G'=G\setminus\{a,b\}$. כמו כן, נסמן $A'=A\setminus\{a\}$ ו- $B'=B\setminus\{b\}$.
נשים לב: לכל $\emptyset\neq S\subseteq A'$ מתקיים $|N_{G'}(S)|\geq|N_G(S)|-1$ (כי $N_{G'}(S)$ קטנה בקודקוד אחד b לכל היותר). לכן, מכיוון שהנחנו $|N_G(S)|>|S|$, מתקיים $|N_{G'}(S)|\geq|S|$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה, ב- G' קיים זיווג M' המרווה את A' .
נגדיר: $M=M'\cup\{\{a,b\}\}$, ואז M הוא הזיווג ב- G המרווה את A , כנדרש.
מקרה 2: קיימת $\emptyset\neq S\subset A$ (מוכלת ממש) כך ש- $|N_G(S)|=|S|$.
יהי G_1 תת הגרף של G הנפרש על ידי קודקודי $S\cup N_G(S)$. כמו כן, יהי G_2 תת הגרף של G הנפרש על ידי קודקודי $(A\setminus S)\cup(B\setminus N_G(S))$.
כעת, נוכיח כי ב- G_1 קיים זיווג M_1 המרווה את S , וב- G_2 קיים זיווג M_2 המרווה את $A\setminus S$, ואז נוכל לאחד את M_1 ו- M_2 ולקבל זיווג ב- G בגודל $|M|=|M_1|+|M_2|=|S|+|A\setminus S|=|A|$.
נסתכל תחילה על G_1 : נבדוק כי תנאי הול מתקיים ב- G_1 עבור צד S : תהי $\emptyset\neq X\subseteq S$. אזי $N_{G_1}(X)=N_G(X)$ (כי בחרנו G_1 כך שלא נאבד קשתות), ולכן לפי תנאי הול על G מתקיים $|N_G(X)|\geq|X|$. לכן, תנאי הול מתקיים גם ב- G_1 , ולכן לפי הנחת האינדוקציה, ב- G_1 קיים זיווג M_1 בגודל $|M_1|=|S|$.
עתה נתבונן בגרף G_2 : נוכיח כי תנאי הול עבר $A\setminus S$ מתקיים ב- G_2 : תהי $\emptyset\neq X\subseteq A\setminus S$. אזי: $|N_{G_2}(X)|+|S|=|N_G(S)|+|N_{G_2}(X)|=|N_G(S)\cup N_{G_2}(X)|=|N_G(S\cup X)|\overset{G \text{ תנאי הול על}}{\geq}|S\cup X|=|S|+|X|$. בסך הכל קיבלנו $|S|+|X|\leq|S|+|N_{G_2}(X)|$, ולכן $|N_{G_2}(X)|\geq|X|$, ולכן תנאי הול מתקיים עבור צד $A\setminus S$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה, ב- G_2 קיים זיווג M_2 בגודל $|M_2|=|A\setminus S|$.
כעת, נגדיר $M=M_1\cup M_2$. מכיוון של- G_1 ו- G_2 קודקודים זרים, M_1 ו- M_2 זרים, ולכן M זיווג ב- G , ומתקיים $|M|=|M_1|+|M_2|=|S|+|A\setminus S|=|A|$, ולכן M זיווג כנדרש.
מש"ל.
ניסוח שקול למשפט הול (במונחים של מערכות נציגים שונים)
<u>הגדרה</u>: אם $\{A_1,\dots,A_n\}$ משפחת קבוצות, n -יה $(a_1,\dots,a_n)$ נקראת **מערכת נציגים שונים** (מנ"ש) של המשפחה אם:
1. $\forall i\,.\,a_i\in A_i$.
2. $\forall i\neq j\,.\,a_i\neq a_j$.

<u>משפט</u> (ניסוח שקול למשפט הול): תהי $\{A_1,\dots,A_n\}$ משפחת קבוצות. אזי למשפחה זו קיים מנ"ש $\Leftrightarrow$ לכל $\emptyset\neq I\subseteq[n]$ מתקיים $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|\geq|I|$.
<u>הוכחה</u>: נגדיר גרף דו צדדי $G=(M\cup W,E)$ כאשר $M=[n]$ (הקבוצות) ו- $W=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ (האיברים של הקבוצות), ועבור $i\in M$ ו- $j\in W$, קיימת הקשת $(i,j)\in E(G)$ אם $j\in A_i$.
נשים לב: ל- $\{A_1,\dots,A_n\}$ קיים מנ"ש $\Leftrightarrow$ ל- G קיים זיווג F המרווה את צד M . אך לפי משפט הול, ל- G קיים זיווג כזה $\Leftrightarrow$ $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|\geq|I|$ לכל $\emptyset\neq I\subseteq[n]$.
מש"ל.
<u>הגדרות</u>:
1. זיווג M בגרף $G=(V,E)$ נקרא **מושלם** אם $|M|=\frac{|V|}{2}$.
2. גרף G נקרא d **-רגולרי** אם $\forall v\in V(G)\,.\,d(V)=d$.

<u>מסקנה</u>: יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי, d -רגולרי כאשר $d\geq1$. אזי ל- G קיים זיווג מושלם.
<u>הוכחה</u>: נשים לב: $d\cdot|A|\overset{d \text{ רגולרי}}{=}\sum_{a\in A}d(a)\overset{\text{דו צדדי}}{=}\sum_{b\in B}d(b)\overset{d \text{ רגולרי}}{=}d\cdot|B|.\text{מכיוון ש}-d\geq1,\text{מתקיים}|A|=|B|$. לכן, די להוכיח כי ב- G קיים זיווג M בגודל $|M|=|A|$.
נבדוק כי תנאי הול עבור צד A מתקיים ב- G : תהי $\emptyset\neq X\subseteq A$. ואכן: $d\cdot|X|=\sum_{a\in X}d(b)\leq\sum_{b\in N_G(X)}d(b)=d\cdot|N_G(X)|$, ולכן $|N_G(X)|\geq|X|$.
לכן, לפי משפט הול, קיים ב- G זיווג M בגודל $|M|=|A|=\frac{|V(G)|}{2}$.
מש"ל.

משפט (*Kőnig*): יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי. אזי $\nu(G)=\tau(G)$.
הוכחה: ראינו כי לכל גרף (לאו דווקא דו צדדי) מתקיים $\nu(G)\le\tau(G)$. נותר להוכיח את ההפך.
יהי T כיסוי בגודל מינימלי ב- G, כלומר $|T|=\tau(G)$. נסמן: $T_1=T\cap A$, $T_2=T\cap B$. נגדיר שני גרפים, G_1,G_2, באופן הבא: G_1 הוא תת הגרף של G הנפרש על ידי הקבוצות T_1 ו- $B\setminus T_2$, ו- G_2 הוא תת הגרף של G הנפרש על ידי הקבוצות $A\setminus T_1$ ו- T_2.
נוכיח כי G_1 מכיל זיווג M_1 בגודל $|T_1|$ ו- G_2 מכיל זיווג M_2 בגודל $|T_2|$:
נבדוק קיום תנאי הול עבור צד T_1 בגרף G_1: נשים לב שלכל קבוצה $\emptyset\ne X\subseteq T_1$, הקבוצה $T_1\cup N_{G_1}(X)\cup T_2\setminus X$ היא עדיין כיסוי של G, ולכן מכיוון ש- T היא כיסוי בגודל מינימלי, נובע כי $|T_1|+|T_2|=|T|\le|T_1|-|X|+|N_{G_1}(X)|+|T_2|$, ולכן $|N_{G_1}(X)|\ge|X|$. לכן, תנאי הול מתקיים עבור צד T_1 ב- G_1.
באופן דומה, מראים כי תנאי הול מתקיים עבור צד T_2 ב- G_2.
לכן, G_1 מכיל זיווג M_1 בגודל $|T_1|$, ו- G_2 מכיל זיווג M_2 בגודל $|T_2|$. נגדיר: $M=M_1\cup M_2$.
מש"ל.

זיווגים מושלמים בגרפים כלליים

הגדרה: רכיב קשירות C בגרף G נקרא **אי-זוגי** אם ב- C מספר אי-זוגי של קודקודים.
סימון: נסמן ב- $o(G)$ (מהמילה *odd*) את מספר רכיבי הקשירות האי-זוגיים של G.
תנאי טאט: $G=(V,E)$ מקיים את תנאי טאט אם לכל $S\subseteq V$ מתקיים $o(G\setminus S)\le|S|$.
משפט (טאט – *Tutte*): בגרף כללי G קיים זיווג מושלם $\Leftrightarrow$ G מקיים את תנאי טאט.
ההוכחה מאוד ארוכה, ולכן נדלג עליה בשלב זה.
מסקנה – משפט (פטרסן – *Petersen*): יהי G גרף 3-רגולרי ללא גשרים ($\kappa'(G)\ge2$). אזי ב- G קיים זיווג מושלם.
הוכחה: נבדוק את קיום תנאי טאט ב- G: תהי $S\subseteq V(G)$.
אם $S=\emptyset$: מכיוון ש- G קשיר, ב- $G=G\setminus S$ יש רכיב קשירות אחד בלבד, והוא עם מספר זוגי של קודקודים: $3|V|=2|E|$, ולכן $o(G\setminus S)=0$.
אם $S\ne\emptyset$: נניח ש- $C_1,\dots,C_k$ הם רכיבי הקשירות האי-זוגיים של $G\setminus S$. יש להראות: $k\le|S|$. נסמן ב- m_i את מספר הצלעות של G בין C_i לבין S. מכיוון ש- G הוא גרף קשיר ללא גשרים, נובע כי $m_i\ge2$. נשים לב שמתקיים $\forall 1\le i\le k.\ \sum_{v\in V(C_i)} d_G(v)=2\cdot e_G(C_i)+m_i$ (כאשר $e_G(C_i)$ הוא מספר הצלעות של G בתוך C_i).
אבל $3\cdot|C_i|=\sum_{v\in V(C_i)=d_G}(v)$, כאשר $3\cdot|C_i|$ אי-זוגי ו- $2\cdot e_G(C_i)$ זוגי, ולכן נקבל ש- m_i אי-זוגי בהכרח. מכיוון ש- $m_i\ge2$, בעצם $m_i\ge3$. מצד שני: $3k\le\sum_{i=1}^{k} m_i\le\sum_{v\in S} d_G(v)=2|S|$, ולכן $k\le|S|$ כנדרש.
לכן, תנאי טאט מתקיים, ולכן יש ב- G זיווג מושלם.
מש"ל.

צביעה קודקודית (*Vertex Coloring*)

הגדרות:
1. יהי $G=(V,E)$ גרף. פונקציה $f:V\to\{1,\dots,k\}$ נקראת ***k*-צביעה** של G אם $\forall(u,v)\in E.f(u)\ne f(v)$.
   הערה: אם $f:V\to[k]$ היא k-צביעה של G, אזי לכל $1\le i\le k$, הקבוצה $V_i=f^{-1}(i)=\{u\in V|f(u)=i\}$ היא קבוצה ב"ת. לכן, כל k-צביעה של G היא למעשה חלוקה של V ל- k קבוצות ב"ת.
2. גרף $G=(V,E)$ נקרא ***k*-צביע** אם קיימת k-צביעה f על G.
3. **מספר הצביעה** של G, המסומן ב- $\chi(G)$, הוא k מינימלי עבורו G k-צביע.

חסמים פשוטים על $\chi(G)$

טענה: אם $G'\subseteq G$ אזי $\chi(G')\le\chi(G)$.
הוכחה: כל k-צביעה של G היא גם k-צביעה של G'. מש"ל.
מסקנה: לכל גרף G מתקיים $\chi(G)\ge\omega(G)$, כאשר $\omega(G)$ הוא מספר הקליקה של G.
טענה: לכל $G=(V,E)$ מתקיים $\chi(G)\ge\frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.
הוכחה: נרשום $\chi(G)=k$, ונניח ש- $f:V\to[k]$ היא k-צביעה של G. לכל $1\le i\le k$ נגדיר $V_i=f^{-1}(i)=\{v\in V|f(v)=i\}$. אזי כל V_i היא קבוצה ב"ת, ולכן $|V_i|\le\alpha(G)$. לכן, $|V|=\left|\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right|=\sum_{i=1}^{k}|V_i|\le\alpha(G)\cdot k$, ולכן $\chi(G)=k\le\frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$. מש"ל.
טענה (חסם עליון טריביאלי): לכל $G=(V,E)$ ולכל $V_0\subseteq V$ מתקיים $\chi(G)\le\chi(G[V_0])+\chi(G[V\setminus V_0])$.
הוכחה: אם $G[V_0]$ הוא k-צביע ו- $G[V\setminus V_0]$ הוא ℓ-צביע, אזי G הוא $(k+\ell)$-צביע, כי נוכל לצבוע את V_0 ב- k צבעים בצורה חוקית ואת $V\setminus V_0$ ב- ℓ צבעים נוספים בצורה חוקית. מש"ל.

טענה (*Nordhaus-Gaddum*): לכל גרף G על n קודקודים מתקיים $\chi(G)+\chi(\bar{G})\le n+1$ כאשר $\bar{G}$ הוא הגרף המשלים צלעית של G.
הוכחה: באינדוקציה על n.
בסיס האינדוקציה – $n=1$: מתקיים $\chi(G)=\chi(\bar{G})=1$, והטענה מתקיימת.
צעד האינדוקציה: נניח שהוכחנו לגרפים עם פחות מ-n קודקודים ונוכיח לגרפים עם n קודקודים. יהי $G=(V,E)$ גרף עם n קודקודים. נבחר קודקוד שרירותי $v\in V$ ונסמן $G_0=G\setminus\{v\}$. אזי $\bar{G}_0=\overline{G\setminus\{v\}}$. לפי הנחת האינדוקציה, $\chi(G_0)+\chi(\bar{G}_0)\le n$.
נניח תחילה כי $\chi(G_0)+\chi(\bar{G}_0)\le n-1$. נשים לב: $\chi(G)\le\chi(G_0)+1$, וכן $\chi(\bar{G})\le\chi(\bar{G}_0)+1$. בסך הכל: $\chi(G)+\chi(\bar{G})\le\chi(G_0)+\chi(\bar{G}_0)+2\le n+1$ כרצוי.
נניח כעת כי $\chi(G_0)+\chi(\bar{G}_0)=n$. תהי $(C_1,\dots,C_k)$ צביעה של G_0 ב-$k=\chi(G_0)$ צבעים. תהי $(D_1,\dots,D_\ell)$ צביעה של $\bar{G}_0$ ב-$\ell=\chi(\bar{G}_0)$ צבעים. אזי $k+\ell=n$.
נחזיר את v ל-G_0 ו-$\bar{G}_0$.
אם קיים $1\le i\le k$ עבורו ב-G אין אף צלע בין C_i ובין v, אזי נוכל להוסיף את v ל-C_i, וליצור בזאת k-צביעה של G. במקרה כזה, קיבלנו $\chi(\bar{G})\ge\ell+1$, ולכן $\chi(G)+\chi(\bar{G})\le k+\ell+1=n+1$ כנדרש.
באופן דומה, אם קיים $1\le j\le\ell$ כך שאין ב-$\bar{G}$ אף צלע בין D_j ל-v, נוכל להוסיף את v ל-D_j, ולקבל ℓ-צביעה של $\bar{G}$, וסיימנו גם במקרה זה.
לכן, נותר לטפל במקרה בו v מחובר ב-G לכל C_i וב-$\bar{G}$ לכל D_j. במקרה כזה, $d_G(v)\ge k$ ו-$d_{\bar{G}}(v)\ge\ell$, ולכן $d_G(v)+d_{\bar{G}}(v)\ge k+\ell=n$, אבל $d_G(v)+d_{\bar{G}}(v)=n-1$, בסתירה!
מש"ל.
הערה: הערכה זו היא הדוקה. למשל, $G=K_n$ ואז $\bar{G}=\bar{K}_n=E_n$, ואז $\chi(G)=n$ ו-$\chi(\bar{G})=1$, ולכן $\chi(G)+\chi(\bar{G})=n+1$.

צביעה חמדנית

הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף, ותהי $\sigma=(v_1,\dots,v_n)$ תמורה של קודקודי G. **הצביעה החמדנית** של G לפי σ מוגדרת באופן הבא: $\forall 1\le i\le n. f(v_i)=min\{k\ge 1|k\notin\{f(v_j)|(v_i,v_j)\notin E(G)\wedge j<i\}\}$.

דרגות ומספר צביעה

הגדרות:
1. יהי $G=(V,E)$ גרף, ויהי $0\le d\in\mathbb{Z}$. נאמר ש-G הוא **d-מנוון** (*degenetate*) אם לכל $G_0\subseteq G$ מתקיים $\delta(G_0)\le d$.
2. **מספר הניוון** של G, המסומן ב-$degen(G)$, הוא d מינימלי כך ש-G הוא d-מנוון.

הערה: $\delta(G)\le degen(G)\le\Delta(G)$.
טענה: יהי G גרף d-מנוון על n קודקודים. אזי קיימת תמורה $\sigma=(v_1,\dots,v_n)$ על קודקודי G כך שמתקיים: $\forall 1\le i\le n.|\{v_j|j<i\wedge(v_j,v_i)\in E(G)\}|\le d$.
הוכחה: נבנה את התמורה המבוקשת מהסוף להתחלה: נניח שהגדרנו כבר את $v_{i+1},\dots,v_n$. נסתכל על $G_i=G[V\setminus\{v_{i+1},\dots,v_n\}]$. מכיוון ש-$G$ הוא d-מנוון, ב-G_i קיים קודקוד v מדרגה $d_{G_i}(v)\le d$. נגדיר: $v_i=v$. נמשיך כך. מש"ל.
משפט (*Szekeres-Wilf*): אם G גרף d-מנוון, אזי $\chi(G)\le d+1$.
הוכחה: מכיוון ש-G הוא d-מנוון, קיימת תמורה $\sigma=(v_1,\dots,v_n)$ על קודקודי G כך שלכל $1\le i\le n$, ל-v_i יש לכל היותר d שכנים בין $\{v_1,\dots,v_{i-1}\}$.
נפעיל את הצביעה החמדנית על G בהתאם לתמורה σ. כשנגיע לצבוע את הקודקוד v_i, נגלה כי ל-v_i יש לכל היותר d שכנים צבועים, ולכן נוכל להשתמש באחד מבין הצבעים $\{1,\dots,d+1\}$ כדי לצבוע את v_i.
מש"ל.
מסקנה:
1. $\chi(G)\le degen(G)+1$.
2. $\chi(G)<+\Delta(G)+1$.

הערה: החסם הנ"ל הוא הדוק. אלה הדוגמאות הנגדיות היחידות:
1. $G=K_n$, ואז $\Delta(G)=n-1$ ו-$\chi(G)=n$.
2. $G=C_{2n+1}$ - מעגל אי-זוגי, ואז $\Delta(G)=2$ ו-$\chi(G)=3$.

למה: יהי G גרף קשיר, ויהי $v\in V(G)$ קודקוד. אזי קיים סדר $(v_1,\dots,v_n)$ על קודקודי G כך שלכל $1\le i<n$, לקודקוד v_i יש שכן מאחוריו (כלומר שכן v_j עם $j>i$), ובנוסף $v_n=v$.
הוכחה: מספיק להוכיח את הטענה עבור עץ פורש T של G, או במילים אחרות עבור המקרה בו G עצמו הוא עץ.
נוכיח באינדוקציה על $|V(G)|$:
בסיס האינדוקציה – $|V(G)|=1$: טריביאלי.

צעד האינדוקציה: מכיוון ש-G הוא עץ על $n\geq 2$ קודקודים, ב-G יש לפחות 2 עלים, ולכן יש עלה u שאינו v. נגדיר: $G'=G\setminus\{u\}$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה, קיים סידור $v_1,\dots,v_{n-1}$ של קודקודי G' בו $v_{n-1}=v$ ולכל קודקוד אחר יש שכן אחריו.
נחזיר את u ונשים אותו ראשון לפני שאר הקודקודים בסידור. נקבל סדר $u,v_1,\dots,v_n$, וזהו הסדר המבוקש.
מש"ל.

משפט ($Brooks$): יהי G גרף קשיר עם דרגה מקסימלית Δ. אזי $\chi(G)\leq\Delta$, אלא אם כן G הוא $K_{\Delta+1}$ או $\Delta=2$ ו-G מעגל אי-זוגי.
הוכחת המשפט ארוכה, ולכן לא נוכיח אותו כעת.

גרפים קריטיים (ביחס לצביעה)

הגדרה: גרף $G=(V,E)$ נקרא **k-קריטי** (ביחס לצביעה) אם $\chi(G)=k$, ולכל $G\neq G'\subset G$, מתקיים $\chi(G')<\chi(G)$.

דוגמאות:

1. $G=K_n$ הוא n-קריטי: $\chi(K_n)=n$, וכמו כן, לכל $u\neq v\in K_n$, מתקיים $\chi(K_n\setminus(u,v))=n-1<n$.
2. $G=C_{2n+1}$ מעגל אי-זוגי הוא 3-קריטי: $\chi(G)=3$ ולכל $e\in E(G)$, $\chi(G\setminus e)=2$.

טענה: יהי G גרף k-כרומטי ($\chi(G)=k$). אזי G מכיל תת גרף k-קריטי G'.

הוכחה: נתחיל מ-$G'=G$, וכל עוד ניתן להוציא מ-G' קודקוד או צלע בלי להוריד את מספר הצביעה, נוציא ונעדכן את G'. אחרי מספר סופי של צעדים, נקבל גרף סופי G' שהוא k-כרומטי, ולכל $G''\subset G'$ מתקיים $\chi(G'')<k$, ולכן G' הוא k-קריטי. מש"ל.

גרפים k-קריטיים:

1. אם $k=1$ אזי $G=K_1$.
2. אם $k=2$ אזי $G=K_2$.

טענה: G הוא 3-קריטי $\Leftrightarrow$ G הוא מעגל אי-זוגי.

הוכחה:

$\Rightarrow$: C_{2n+1} הוא 3-קריטי.

$\Leftarrow$: נניח ש-G הוא 3-קריטי. אזי $\chi(G)=3$, ולכן G מכיל מעגל אי-זוגי C. אזי G לא מכיל שום דבר אחר, כי הוא 3-קריטי. לכן, $G=C$.
מש"ל.

הערה: אין אפיון פשוט לגרפים k-קריטיים לכל $k\geq 4$ קבוע.

תכונות של גרפים k-קריטיים

טענה: אם G גרף k-קריטי, אזי:

1. לכל $v\in V(G)$, בכל $(k-1)$-צביעה של $G\setminus\{v\}$, כל $k-1$ הצבעים מופיעים על השכנים של v.
2. לכל $e=(u,v)\in E(G)$, בכל $(k-1)$-צביעה של $G\setminus e$, מתקיים $f(u)=f¿$).

הוכחה:

1. נניח בשלילה כי קיימת $(k-1)$-צביעה f של $G\setminus\{v\}$ שמחסירה צבע $1\leq i<k$ על השכנים של v. אזי נוכל להרחיב את f לצביעה של G כולו על ידי הגדרה $f(v)=i$, ולקבל $(k-1)$-צביעה של G, בסתירה!
2. נניח בשלילה כי קיימת $(k-1)$-צביעה f של $G\setminus e$ עבורה $f(v)\neq f(u)$. אזי f היא למעשה $(k-1)$-צביעה של G כולו, בסתירה!

מש"ל.

מסקנה: אם G גרף k-קריטי, אזי $\delta(G)\geq k-1$, ולכן $|E(G)|\geq\frac{k-1}{2}\cdot|V(G)|$.

קשירות של גרפים קריטיים

משפט: אם G גרף k-קריטי, $k\geq 3$, אזי $\kappa(G)\geq 2$.

הוכחה: אם G לא קשיר, אזי G הוא איחוד זר של גרפים G_1,G_2 לא ריקים. מכיוון ש-G k-קריטי, $\chi(G_1),\chi(G_2)\leq k-1$, ואז נוכל להסיק כי G עצמו הוא $(k-1)$-צביע (מהדבקת הצביעות של G_1,G_2), בסתירה!
אם $\kappa(G)=1$, יהי v קודקוד חתך של G, ויהיו $C_1,\dots,C_t$ רכיבי הקשירות של $G\setminus\{v\}$ ($t\geq 2$). לכל $1\leq i\leq t$, נגדיר $G_i=C_i\cup\{v\}$. אזי $G_i\subset G$, ולכן מכיוון ש-G הוא k-קריטי, $\chi(G_i)\leq k-1$. נצבע כל G_i ב-$(k-1)$-צבעים על ידי f_i. בה"כ נניח $f_i(v)=1$. אזי הצביעה f המתקבלת על ידי הצביעות $f_1,\dots,f_t$ היא $(k-1)$-צביעה חוקית של G – בסתירה!
לכן, $\kappa(G)\neq 0$ ו-$\kappa(G)\neq 1$, ולכן $\kappa(G)\geq 2$.
מש"ל.

הערה: החסם $\kappa(G)\geq 2$ הוא הדוק.

למה: יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו-צדדי עם $|A|=|B|=t$. אם $|E|>t(t-1)$, אזי ב-G יש זיווג מושלם.

הוכחה: לפי משפט קוניג, די להוכיח כי $\tau(G)=t$. נניח בשלילה שקיים כיסוי $T\subseteq A\cup B$ בגודל $|T|\le t-1$. נשים לב כי כל קודקוד $v\in V(G)$ סמוך לכל היותר t צלעות. לכן, T סמוכה לכל היותר $|T|\cdot t\le t(t-1)$ צלעות, בסתירה לכך ש- T היא כיסוי ו- $|E|>t(t-1)$. מש"ל.

משפט ($Dirac$): יהי G גרף k-קריטי. אזי $\kappa'(G)\ge k-1$.

הוכחה: יש לוודא שלכל חלוקה $V(G)=X\cup Y$, $X,Y\ne\emptyset$ ו- $X\cap Y=\emptyset$, מתקיים $\|[X,Y]\|\ge k-1$.

נניח בשלילה שקיים חתך $[X,Y]$ ב- G עם פחות מ- $k-1$ צלעות. מכיוון ש- G k-קריטי, שני הגרפים $G[X]$ ו- $G[Y]$ הם $(k-1)$-צביעים. נניח כי $(C_1,\dots,C_{k-1})$ היא $(k-1)$-צביעה של $G[X]$ ו- $(D_1,\dots,D-k-1)$ היא $(k-1)$-צביעה של $G[Y]$.

נגדיר גרף עזר דו-צדדי $H=(A\cup B,E)$ עם צדדים $A=[k-1]$ - הצבעים $(C_1,\dots,C_{k-1})$ ו- $B=[k-1]$ - הצבעים $(D_1,\dots,D_{k-1})$, ו- $(i,j)\in E(H)$ אם G לא מכיל אף צלע בין C_i ל- D_j.

מכיוון ש- $\|[X,Y]\|\le k-2$, ב- H חסרים לכל היותר $k-2$ צלעות. לפי הלמה, ב- H קיים זיווג מושלם M. נרשום: $M=\{(1,i_1),\dots,(k-1,i_{k-1})\}$.

אזי לפי הגדרת H, ב- G אין צלע בין C_1 לבין D_{i_1}, בין C_2 לבין D_{i_2}, וכו'. אזי נוכל לאחד את C_1 עם D_{i_1}, את C_2 עם D_{i_2} וכו', ולקבל $(k-1)$-צביעה של G כולו, בסתירה לכך ש- $\chi(G)=k$.

מש"ל.

הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף. **המותן** של G, המסומן ב- $gizth(G)$, הוא אורך המעגל הקצר ביותר ב- G. אם ב- G אין מעגלים (כלומר G יער), נסמן $gizth(G)=\infty$.

השאלה: האם לכל $k,\ell>0$ קיים גרף G עבורו $\chi(G)>k$ ו- $gizth(G)>\ell$? כן, אכן קיים. נראה משפט.

בנייה של גרפים חסרי משולשים עם מספר צביעה גבוה

משפט ($Zykov$): לכל $t\ge1$, קיים גרף G_t ללא משולשים עם $\chi(G_t)\ge t$.

מסקנה: מכיוון שבנינו גרפים חסרי משולשים ($\omega(G)\le2$) עם מספר צביעה גבוה כרצוננו, לא ניתן לחסום את $\chi(G)$ בפונקציה של $\omega(G)$.

משפט ($Erdős$): לכל $k,\ell>0$ קיים גרף G אשר מקיים $\chi(G)>k$ ו- $gizth(G)>\ell$.

הגדרה: **גרף מקרי** $G(n,p)$ הוא גרף המקיים:

1. $V(G)=[n]$.
2. $\forall1\le i<j\le n.P((i,j)\in E(G))=p$ באופן ב"ת בצלעות אחרות.

צביעה צלעית

הגדרות:

1. יהי $G=(V,E)$ (מולטי-)גרף. **צביעה צלעית** $c:E\to[k]$ היא **k-צביעה צלעית** של G אם $c(e)\ne c(e')$ לכל $e'\ne e\in E$ המקיימות $e\cap e'\ne\emptyset$.
2. יהי $G=(V,E)$ (מולטי-)גרף. **האינדקס הכרומטי** או **מספר הצביעה הצלעי** של G, המסומן ב- $\chi'(G)$, הוא k מינימלי עבורו קיימת k-צביעה צלעית של G.

הערות:

1. אם $c:E(G)\to[k]$ היא k-צביעה צלעית של G, אזי c היא k-צביעה (קודקודית) של גרף הצלעות $L(G)$.
2. אם $c:E(G)\to[k]$ היא k-צביעה צלעית של G, אזי לכל $1\le i\le k$ הקבוצה $M_i=c^{-1}(i)=\{e\in E|c(e)=i\}$ היא זיווג ב- G.

למה: $\chi'(K_n)=\begin{cases}n-1 & \text{זוגי } n\\ n & \text{אי-זוגי } n\end{cases}$.

חסמים ל- $\chi'(G)$:

1. $\chi'(G)\ge\frac{|E(G)|}{\nu(G)}$ (בצביעה קודקודית ראינו $\chi(G)\ge\frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$).
2. $\chi'(G)\ge\Delta(G)$ (בצביעה קודקודית: $\chi(G)\ge\omega(G)$).

טענה: לכל גרף G מתקיים $\chi'(G)\le2\Delta(G)-1$.

משפט ($Kőnig$): לכל גרף דו צדדי G מתקיים $\chi'(G)=\Delta(G)$.

הוכחה: נוכל להניח $\Delta(G)>0$.

נניח תחילה כי G הוא גרף Δ-רגולרי. נזכור כי כל גרף דו צדדי d-רגולרי ($d>0$) מכיל זיווג מושלם. לכן, נוכל למצוא זיווג מושלם M_1 ב- G. נצבע את M_1 בצבע 1, ונוציא את M_1 מ- G. קיבלנו גרף G' שהוא $(\Delta-1)$-רגולרי. נוכל להמשיך באותה צורה, נוציא זיווגים $M_1,\dots,M_\Delta$ ונצבע אותם בצבעים שונים.

נשים לב כי לכל זוג גרפים G,G' המקיים $G\subseteq G'$ מתקיים $\chi(G)\le\chi'(G')$. לכן, המשפט ינבע אם נוכיח: לכל גרף G דו צדדי עם דרגה מקסימלית Δ קיים גרף דו צדדי Δ-רגולרי G' כך ש- $G\subseteq G'$. נוכיח באינדוקציה על $\delta(G)$.

בסיס האינדוקציה - $\delta(G)=\Delta$: אזי G עצמו הוא Δ-רגולרי, ונוכל לקחת $G'=G$.

צעד האינדוקציה: נניח כי $\delta(G)<\Delta$. ניקח שני עותקים G_1,G_2 של G, ולכל זוג של קודקודים "אחים"

מדרגה $\delta(G)$ בשני העותקים – נחבר אותם בצלע. קיבלנו גרף דו צדדי G' שבו $\delta(G')>\delta(G)$. מהנחת האינדוקציה, G' מוכל בגרף Δ-רגולרי דו צדדי.
מש"ל.

<u>משפט</u> (*Vizing*): יהי G גרף פשוט מדרגה מקסימלית Δ. אזי $\chi'(G)\le\Delta+1$.

<u>הערה</u>: החסם לא נכון לגרפים לא פשוטים.

הוכחת המשפט ארוכה מאוד, ולכן לא נוכיח כעת.

<u>מסקנה</u>: אם G גרף פשוט, אזי $\Delta(G)\le\chi'(G)\le\Delta(G)+1$.

<u>תורת רמזי</u> (*Ramsey*)

<u>עקרון שובך היונים</u>: "בין כל שלושה אנשים רגילים, יש שניים מאותו המין".

<u>טענה</u>: בכל צביעה צביעה של $k+\ell-1$ עצמים באדום ובכחול, יש קבוצת עצמים אדומה בגודל k או קבוצת עצמים כחולה בגודל ℓ.

<u>הגדרה</u>: יהיו $2\le k,\ell\in\mathbb{Z}$. **מספר רמזי** $R(k,\ell)$ הוא n מינימלי עבורו בכל צביעה של צלעות הגרף השלם K_n באדום וכחול קיימת קליקה אדומה בגודל k או קליקה כחולה בגודל ℓ.

<u>משפט</u> (*Ramsey*): לכל $2\le k,\ell\in\mathbb{Z}$ מתקיים $R(k,\ell)<\infty$.

<u>דוגמאות</u>:

1. $R(k,2)=k$.
   חסם תחתון: נצבע את $E(K_{k-1})$ כולו באדום.
   חסם עליון: תהי $c:E(K_k)\to\{R,B\}$ 2-צביעה של $E(K_k)$. אם ב-c קיימת צלע כחולה – סיימנו, כי מצאנו K_2 כחול. אחרת, כל הצלעות של K_k נצבעו על ידי c באדום, ואז מצאנו קליקה אדומה בגודל k.
2. $R(2,\ell)=\ell$ – באותו האופן.
3. $R(3,3)=6$.
   חסם תחתון: ברור כי $R(3,3)>5$ (מהסתכלות ב-K_5).
   חסם עליון: "בכל חבורה של 6 אנשים, תמיד קיימים 3 כך שכל 2 ביניהם מכירים זה את זה, או לחלופין, שכל 2 ביניהם לא מכירים זה את זה". הסבר: תהי $c:E(K_6)\to\{R,B\}$ צביעה של $E(K_6)$ באדום וכחול. יהי $v\in V(K_6)$ קודקוד כלשהו. ב-K_6 יש בדיוק 5 צלעות הסמוכות ל-v, ואז לפי עקרון שובך היונים, יש 3 צלעות הסמוכות ל-v הצבועות באותו הצבע. בה"כ נניח כי אלה צלעות אדומות. נסמן אותן (v,u_1), (v,u_2), (v,u_3). אם אחת הצלעות (u_i,u_j) עבור $1\le i<j\le 3$ צבועה באדום, אזי קיבלנו משולש אדום (v,u_i,u_j). אחרת, כל אחת מהצלעות (u_i,u_j) היא כחולה תחת c, ואז קיבלנו משולש כחול (u_1,u_2,u_3).

<u>טענה</u> (*Erdős*): לכל $k,\ell\ge3$ מתקיים $R(k,\ell)\le R(k-1,\ell)+R(k,\ell-1)$.

<u>הוכחה</u>: נסמן: $n=R(k-1,\ell)+R(k,\ell-1)$. צ"ל: בכל צביעה c של $E(K_n)$ באדום וכחול קיימת קליקה אדומה בגודל k או קליקה כחולה בגודל ℓ.

יהי $v\in V(K_n)$ קודקוד שרירותי. נסתכל על $n-1$ הצלעות של K_n החלות ב-v. מכיוון ש-$n-1=R(k-1,\ell)+R(k,\ell-1)-1$, לפי עקרון שובך היונים, מבין הצלעות האלה יש לפחות $R(k-1,\ell)$ צלעות אדומות או לפחות $R(k,\ell-1)$ צלעות כחולות.

מקרה 1: ב-v חלות לפחות $R(k-1,\ell)$ צלעות אדומות.
נסמן ב-U את קבוצת השכנים האדומים של v תחת c. מכיוון ש-$|U|\ge R(k-1,\ell)$, לפי ההגדרה של $R(k-1,\ell)$, בתוך U קיימת קליקה אדומה בגודל $k-1$ או קליקה כחולה בגודל ℓ.
במקרה הראשון, נצרף את v לאותה הקליקה האדומה, ונקבל קליקה אדומה בגודל k. במקרה השני, מצאנו קליקה כחולה בגודל ℓ, כרצוי.

מקרה 2: ב-v חלות לפחות $R(k,\ell-1)$ צלעות כחולות.
באופן דומה מוצאים קליקה אדומה בגודל k או קליקה כחולה בגודל ℓ.

מש"ל.

<u>תזכורת</u>: זהות פסקל: $\binom{a}{b}=\binom{a-1}{b-1}+\binom{a-1}{b}$.

<u>מסקנה – משפט</u> (*Erdős-Szekeres*): לכל $k,\ell\ge2$ מתקיים $R(k,\ell)\le\binom{k+\ell-2}{k-1}$.

<u>הוכחה</u>: הוכחנו: $R(k,2)=k$, $R(2,\ell)=\ell$, $R(k,\ell)\le R(k,\ell-1)+R(k-1,\ell)$. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $k+\ell$.

בסיס האינדוקציה: $R(k,2)=k=\binom{k+2-2}{k-1}$ וכן $R(2,\ell)=\binom{2+\ell-2}{2-1}$.

צעד האינדוקציה:
$$R(k,\ell)\overset{\text{טענת Erdős}}{\le} R(k-1,\ell)+R(k,\ell-1)\overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\le}\binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1}+\binom{k+(\ell-1)-2}{k-1}=$$
$$=\binom{k+\ell-3}{k-2}+\binom{k+\ell-3}{k-1}\overset{\text{זהות פסקל}}{=}\binom{k+\ell-2}{k-1}.$$
מש"ל.

הערה: נתבונן במספרי רמזי האלכסוניים: $R(\ell,\ell)\le\binom{\ell+\ell-2}{\ell-1}=\binom{2\ell-2}{\ell-1}\le 2^{\ell-2}<4^{\ell}$, ולכן $R(\ell,\ell)<4^{\ell}$.

חסם תחתון למספרי רמזי אלכסוניים

נשים לב: $R(k,k)>n \Leftrightarrow$ קיימת 2-צביעה של $E(K_n)$ בה אין קליקה מונוכרומטית בגודל k.

משפט (*Erdős*): אם $\binom{n}{k}\cdot 2^{1-\binom{k}{2}}<1$ אזי $R(k,k)>n$.

הוכחה: נניח כי k,n מקיימים את אי-השוויון. נסמן ב- Ω את קבוצת כל ה-2-צביעות של $E(K_n)$. אזי $|\Omega|=2^{\binom{n}{2}}$. נוכיח: קיימת 2-צביעה ללא קליקה מונוכרומטית בגודל k.

עבור קבוצה $S\subseteq[n]$ בגודל $|S|=k$, נסמן ב- A_S את קבוצת כל ה-2-צביעות של $E(K_n)$ אשר יוצרות קליקה מונוכרומטית על S. אזי: $|A_S|=2\cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ (2 – אדום או כחול על S, וה-2 הנוסף הוא צביעת שאר הקודקודים).

נשים לב כי הקבוצה $\bigcup_{|S|=k}A_S$ היא בדיוק קבוצת כל ה-2-צביעות של $E(K_n)$ בהן יש קליקה מונוכרומטית בגודל k. אזי: $\left|\bigcup_{|S|=k}A_S\right|\le\sum_{|S|=k}|A_S|=\binom{n}{2}2^{1+\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$.

נתון: $\binom{n}{k}\cdot 2^{1-\binom{k}{2}}<1$, ולכן $\left|\bigcup_{|S|=k}a_S\right|<|\Omega|$, ולכן קיימת 2-צביעה c של $E(K_n)$ אשר לא נמצאת ב- $\bigcup_{|S|=k}A_S$, ולפי ההגדרה של A_S, הצביעה c היא אכן הצביעה הדרושה.

מש"ל.

מסקנה: אם $n=\left\lfloor 2^{\frac{k}{2}}\right\rfloor$, אזי $R(k,k)>n$.

הוכחה: לפי המשפט, די לבדוק ש- $\binom{\left\lfloor 2^{\frac{k}{2}}\right\rfloor}{k}\cdot 2^{1-\binom{k}{2}}<1$. ואכן: $\binom{\left\lfloor 2^{\frac{k}{2}}\right\rfloor}{k}\cdot 2^{1-\binom{k}{2}}\underset{\binom{n}{k}\le\frac{n^k}{k!}}{\le}\frac{\left(2^{\frac{k}{2}}\right)^k}{k!}\cdot 2^{1-\binom{k}{2}}=\frac{2^{\frac{k^2}{2}+1-\binom{k}{2}}}{k!}=\frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{2}<1$.

מש"ל.

סיכום: $\left(\sqrt{2}\right)^k<R(k,k)<4^k$.

משפט רמזי הכללי

משפט (*Ramsey – 1930*): לכל $k\ge2$ ולכל $s\ge2$ ולכל $t_1,\dots,t_s$ קיים מספר $n=R(k;t_1,\dots,t_s)$ כך שבכל צביעה של כל תת קבוצה $U\subseteq V$ של $[n]$ בגודל k ב- s צבעים, קיים $1\le i\le s$ כך שעבורו קיימת תת קבוצה $U\subseteq V$ בגודל $|U|=t_i$, שבתוכה כל ה- k-יות צבועות בצבע i.

הערה: משפט רמזי גרפי מתקבל עבור $k=2$ ו- $s=2$.

הפירוש הגרפי של משפט רמזי: נניח ש- $c:E(K_n)\to\{B,R\}$ 2-צביעה צלעית של K_n. נסמן: G – גרף הצלעות האדומות, ולכן $\bar{G}$ הוא גרף הצלעות הכחולות. קליקה אדומה היא קליקה ב- G, וקליקה כחולה היא קליקה ב- $\bar{G}$, כלומר קבוצה ב"ת ב- G. לכן, ניסוח שקול למשפט רמזי הוא כדלקמן:

משפט (ניסוח שקול למשפט *Ramsey*): לכל $k,\ell>2$, קיים n כך שבכל גרף G על n קודקודים מתקיים $\omega(G)\ge k$ או $\alpha(G)\ge\ell$.

הכללה נוספת למשפט רמזי הבסיסי

משפט: יהי $2\le s\in\mathbb{Z}$, ויהיו $H_1,\dots,H_s$ גרפים. אזי קיים $R(H_1,\dots,H_s)=n$ מינימלי עבורו בכל צביעה של $E(K_n)$ ב- s צבעים, קיים $1\le i\le s$ שהצבע i מכיל עותק של H_i.

הערות:

1. משפט רמזי הבסיסי (על $R(k,\ell)$) הוא המקרה $s=2$, $H_1=K_k$ ו- $H_2=K_\ell$.
2. ממשפט ההכללה הנ"ל נובע משפט רמזי הכללי (ניקח $k=2$ ו- $t_i=|V(H_i)|$, וזה מכיוון ש- $H_i\subseteq K_{t_i}$).

משפט (*Chvátal – 1977*): יהי T עץ על n קודקודים. אזי לכל $n\ge2$ מתקיים $R(T,K_n)=(m-1)(n-1)+1$.

תורת הגרפים הקיצונית (*extremed graph theory*)

הגדרה: יהי $n\ge2$ ויהי H גרף על לכל היותר n קודקודים. נסמן ב- $\boldsymbol{ex(n,H)}$ את המספר המקסימלי של צלעות בגרף G על n קודקודים ללא עותק (לאו דווקא מושרה) של H.

נחקור את המקרה שבו $H=K_r$, $r\ge3$ ו- $n\ge3$ (בשאיפה ל- ∞).

<u>הגדרה</u>: יהי $r\le 2$, ויהיו $n_1,\dots,n_r\ge 1$ שלמים. **הגרף השלם ה-** r **-צדדי** $K_{n_1,\dots,n_r}$ הוא הגרף הבא: $V\left(K_{n_1,\dots,n_r}\right)$ הוא איחוד זר של קבוצות $V_1,\dots,V_r$ בגדלים $|V_i|=n_i$, ו- $E\left(K_{n_1,\dots,n_r}\right)$ מוגדרת כך שהקבוצות $V_1,\dots,V_r$ הן ב"ת, כלומר יש צלע בין $v\in V_i$ ו- $u\in V_j$ אם ורק אם $i\ne j$.

נשים לב: $\left|E\left(K_{n_1,\dots,n_r}\right)\right|=\sum_{1\le i<j\le r} n_i\cdot n_j=\binom{n_1+\dots+n_r}{2}-\sum_{i=1}^{r}\binom{n_i}{2}$.

<u>הערה</u>: לכל $n_1,\dots,n_{r-1}$, הגרף השלם $K_{n_1,\dots,n_r}$ לא מכיל עותק של K_r .

<u>מסקנה</u>: אם $n=n_1+\dots+n_{r-1}$ כאשר $n_i>0$, אזי $ex\left(n,K_r\right)\ge\left|E\left(K_{n_1,\dots,n_{r-1}}\right)\right|$, ולכן מתקיים $ex\left(n,K_r\right)\ge \max_{n=n_1+\dots+n_{r-1}}\left|E\left(K_{n_1,\dots,n_{r-1}}\right)\right|$. נרצה למצוא את הערך של הביטוי הזה.

<u>סימון</u>: $t_{r-1}(n)=\max_{n=n_1+\dots+n_{r-1}}\left|E\left(K_{n_1,\dots,n_{r-1}}\right)\right|$.

<u>טענה</u>: $t_{r-1}(n)$ מתקבל עבור חלוקה של n ל- $r-1$ קבוצות שוות ככל האפשר.

<u>הוכחה</u>: נניח כי החלוקה $n=n_1+\dots n_{r-1}$ היא חלוקה אופטימלית. תהיינה $V_1,\dots,V_{r-1}$ הקבוצות המתאימות.

צ"ל: $\left\|V_i\right|-\left|V_j\right\|\le 1$.

נניח כי $|V_i|>|V_j|$ עבור $1\le i\ne j\le r-1$. יהי $v\in V_i$. נגדיר חלוקה חדשה $V_1',\dots,V_{r-1}'$ באופן הבא: $V_i'=V_i\setminus\{v\}$ ו- $V_j'=V_j\cup\{v\}$, ולכל $k\notin\{i,j\}$ נסמן $V_k'=V_k$.

נסמן את הגרף המקורי ב- G , ואת החדש ב- G' . אזי $|E(G')|-|E(G)|=|V_i|-1-|V_j|$.

אבל G נבחר להיות גרף אופטימלי. לכן, $|E(G')|\le|E(G)|$. לכן, $|V_i|-1-|V_j|\le 0$ ולכן $|V_i|\le|V_j|+1$.

מש"ל.

<u>מסקנה</u>: נרשום $n=q(r-1)+s$ (כאשר $0\le s<r-1$ – שארית). אזי החלוקה האופטימלית היא s קבוצות בגודל $q+1$ ו- $r-1-s$ קבוצות בגודל q . ואז: $t_{r-1}(n)=\binom{n}{2}-s\cdot\binom{q+1}{2}-(r-1-s)\binom{q}{2}$.

אם $n=q(r-1)+s$ כאשר $0\le s<r-1$, נעריך את $t_{r-1}(n)$ כאשר r קבוע ו- $n\to\infty$. אזי כל החלקים V_i הם בגודל $|V_i|\approx\frac{n}{r-1}$, ואז $t_{r-1}(n)\approx\binom{n}{2}-(r-1)\cdot\binom{\frac{n}{r-1}}{2}\approx\frac{n^2}{2}-(r-1)\cdot\frac{n^2}{2(r-1)^2}=\frac{n^2}{2}-\frac{n^2}{2}\cdot\frac{1}{r-1}=\frac{r-2}{r-1}\cdot\frac{n^2}{2}$, ובאופן פורמלי: $t_{r-1}(n)\le\frac{r-2}{r-1}\cdot\binom{n}{2}$.

כמו כן, נשים לב כי הגרף ה- $(r-1)$ -צדדי השלם עם q צדדים בגודל $q+1$ ו- $r-1-s$ בגודל q הוא הגרף האופטימלי היחיד (עד כדי שינוי שמות החלקים). נסמנו ב- $T_{r-1}(n)$. אזי $t_{r-1}(n)=\left|E\left(T_{r-1}(n)\right)\right|$.

למעשה, הוכחנו: $ex\left(r,K_2\right)\ge t_{r-1}(n)$.

<u>משפט</u> (*Mantel*): אם G הוא גרף על n קודקודים ללא משולש K_3 , אזי $|E(G)|\le\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$.

<u>הוכחה</u>: נסמן ב- Δ את הדרגה המקסימלית של G . יהי $v\in V(G)$ קודקוד מדרגה Δ ב- G . נסמן ב- A את קבוצת השכנים של v , ונסמן ב- B את שאר הקודקודים ($B=V(G)\setminus A$).

אזי $|A|=\Delta$ (ולכן $|B|=n-\Delta$) ו- A היא קבוצה ב"ת ב- G (אחרת כל צלע שהייתה ב- A הייתה סוגרת משולש עם v). לכן, $|E(G)|\le\sum_{u\in B}d(u)\le(n-\Delta)\cdot\Delta$ חסם עליון.

אם נסמן $f(x)=(n-x)\cdot x$, אזי המקסימום של f על הנקודות השלמות בין 0 ל- n מתקבל עבור $x=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, והוא $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$, ולכן $|E(G)|\le\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$.

מש"ל.

<u>מסקנה</u>: $ex\left(n,K_3\right)=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$.

<u>משפט</u> (טוראן – *Turán*): לכל $r,n\in\mathbb{Z}$ כאשר $r\ge 2$, אם G גרף על n קודקודים, ללא K_r , ועם $ex\left(n,K_r\right)$ צלעות, אזי G איזומורפי ל- $T_{r-1}(n)$.

<u>הערה</u>: למעשה, המשפט אומר את הדברים הבאים:

- $ex\left(n,K_r\right)=t_{r-1}(n)$.
- הגרף האופטימלי היחיד (עד כדי איזומורפיזם) הוא $T_{r-1}(n)$.

ההוכחה ארוכה, ולכן לא נכתוב אותה כעת.

<u>מסקנות</u>:

1. אם $G=(V,E)$ ו- $|V|=n$ ו- $|E|>t_{r-1}(n)$, אזי $K_r\subseteq G$.
2. אם $G=(V,R)$ גרף קיצוני עבור K_2 , אזי הוא איזומורפי ל- $T_{r-1}(n)$.

ניסוח משפט טוראן דרך קבוצות ב"ת: יהי $G=(V,E)$ גרף על n קודקודים. אם $|E(G)|<\binom{n}{2}-t_{r-1}(n)$ אזי $\alpha(G)\geq r$.

הוכחה: אם $|E(G)|\leq\binom{n}{2}-t_{r-1}(n)$ אזי $|E(\bar{G})|\geq t_{r-1}(n)$, ולכן לפי משפט טוראן, $\bar{G}$ מכיל עותק של K_r, שהוא קבוצה ב"ת ב- G. מש"ל.

משפט: יהי $G=(V,E)$ גרף עם קבוצת קודקודים $V=[n]$, וסדרת דרגות $(d_1,\ldots,d_n)$ (כאשר $d_i=d_G(i)$). אזי $\alpha(G)\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i+1}$.

הוכחה: עבור תמורה $\sigma\in S_n$ על קודקודי G, נסמן $I=I(\sigma)=\{1\leq i\leq n|\sigma-ב\ i\ מקדים\ את\ כל\ שכניו\}\subseteq[n]$. נשים לב כי לכל $\sigma\in S_n$, הקבוצה $I(\sigma)$ היא קבוצה ב"ת.
ואכן, אם בשלילה נניח ש- $i,j\in I$ ו- $(i,j)\in E(G)$, אזי נניח בה"כ כי i מקדים את j ב- σ, אזי j לא יכול להיכלל ב- I, כי ב- σ יש לו שכן מקדים. סתירה!
נבחר $\sigma\in S_n$ בצורה מקרית ואחידה. נסמן ב- $X=X(\sigma)$ את המ"מ המוגדר לפי $X=|I(\sigma)|$.
נעריך את תוחלת $E(X)$: נגדיר מ"מ X_i באופן הבא: $X_i=\begin{cases}1 & i\in I\\ 0 & i\notin I\end{cases}$. אזי $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, ולכן מלינאריות התוחלת נקבל $E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$, ומכיוון ש- X_i מ"מ מציינים, נובע $E(X_i)=P(X_i=1)$, ולפי הגדרת X_i, $X_i=1 \Leftrightarrow i$ מקדים את כל d_i שכניו בתמורה המקרית σ. ההסתברות לכך היא $\frac{d_i!}{(d_i+1)!}$ (מספר הסידורים של i ושכניו כאשר i ראשון חלקי מספר הסידורים הכולל של i ושכניו). כלומר, $P(X_i=1)=\frac{d_i!}{(d_i+1)!}=\frac{1}{d_i+1}$. לכן, $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i+1}$.
לכן קיימת תמורה $\sigma\in S_n$ ש- $X(\sigma)$ שלה גדול מהתוחלת, כלומר $|I(\sigma)|=X(\sigma)\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i+1}$, ולכן $\alpha(G)\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i+1}$.
מש"ל.

מסקנה: אם $G=(V,E)$ גרף על n קודקודים מדרגה מרבית Δ, אזי $\alpha(G)\geq\frac{n}{\Delta+1}$.

הוכחה: $\alpha(G)\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i+1}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta+1}=\frac{n}{\Delta+1}$. מש"ל.

הערה: למעשה, הוכחנו זאת קודם: אם $\Delta(G)=\Delta$, אזי $\chi(G)\leq\Delta+1$, ולכן $\alpha(G)\geq\frac{|V(G)|}{\Delta+1}$.

מסקנה: אם G גרף על n קודקודים מדרגה ממוצעת d, אזי $\alpha(G)\geq\frac{n}{d+1}$.

הוכחה: $\alpha(G)\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i+1}\geq\frac{n}{d+1}$ (אי השוויון הימני נובע מקמירות $\frac{1}{1+x}$). מש"ל.

הכללת משפט טוראן

משפט (*Erdős-Stone-Sironovits*): יהי H גרף צביע עם $\chi(H)\geq 2$. אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}}=\frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$ (כלומר ההתנהגות האסימפטוטית של מספר טוראן $ex(n,H)$ נקבעת על ידי $\chi(H)$).

דוגמה: לכל גרף H קבוע עם $\chi(H)=3$, נקבל $ex(n,H)=\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{2}+o(n^2)$. אם $\chi(H)=2$, כלומר גרף דו צדדי, אזי לפי המשפט נקבל $ex(n,H)=o(n^2)$.

בעיית *Zarankixwicz* (מ-1951): נגדיר פונקציה $z(m,n;s,t)$ באופן הבא: $z(m,n;s,t)$ יהיה המספר המקסימלי של 1 -ים במטריצת 0/1 מסדר $m\times n$ ללא תת מטריצה של 1 -ים מסדר $s\times t$. ניסוח גרפי: אם $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי, אזי $z(m,n;s,t)=max\{|E(G)|\,|\,|A|=m\wedge|B|=n\wedge K_{s,t}\ לא\ מכיל\ G\}$.

משפט (*Kovari-Sos*): יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי עם $|A|=m$ ו- $|B|=n$. נסמן: $d=\frac{|E|}{m}$ (הדרגה הממוצעת של צד A). אם G אינו מכיל עותק של $K_{s,t}$, אזי $m\cdot\binom{d}{t}\leq(s-1)\cdot\binom{n}{t}$.

<u>הוכחה</u>: על ידי ספירה כפולה, נסמן ב- x את מספר הזוגות (a,S) כאשר $a\in A$ ו- $S\subseteq B$ קבוצת שכנים (כלשהי) של a בגודל t. אזי מצד אחד $x=\sum_{a\in A}\binom{d(a)}{t}$, ומצד שני, מכיוון ש- $K_{s,t}$ לא מוכל ב- G, כל קבוצה $S\subseteq B$ בגודל t משותפת לכל היותר $s-1$ זוגות (a,S) כנ"ל (כי אחרת היינו מקבלים עותק של $K_{s,t}$ המבוסס על S ושכניה). לכן, $\sum_{a\in A}\binom{d(a)}{t}=x\leq(s-1)\cdot\binom{n}{t}$, ולכן $m\cdot\binom{d}{t}\overset{\text{קמירות}}{\leq}\sum_{a\in A}\binom{d(a)}{t}\leq(s-1)\binom{n}{t}$. מש"ל.

<u>מסקנה</u>: $z(m,n;s,t)\leq(s-1)^{\frac{1}{t}}\cdot n\cdot m^{1-\frac{1}{t}}+(t-1)\cdot m$.

<u>הוכחה</u>: $m\cdot\binom{d}{t}\leq(s-1)\cdot\binom{n}{t}$ $\Leftarrow$ $\frac{m\cdot(d-1+t)^t}{t!}\leq\frac{(s-1)\cdot n^t}{t!}$ $\Leftarrow$ $m\cdot(d-1+t)^t\leq(s-1)\cdot n^t$ $\Leftarrow$ $(d-1+t)\cdot m^{\frac{1}{t}}\leq(s-1)^{\frac{1}{t}}\cdot n$

$\Leftarrow$ $d\leq\frac{(s-1)^{\frac{1}{t}}\cdot n}{m^{\frac{1}{t}}}+(t-1)$. אבל $d=\frac{|E(G)|}{m}$, ולכן (אם ניקח את G להיות גרף קיצוני עם הכי הרבה צלעות):

$|E(G)|=z(m,n;s,t)=(s-1)^{\frac{1}{t}}\cdot n\cdot m^{1-\frac{1}{t}}+(t-1)\cdot m$. מש"ל.

<u>הערה</u>: בפרט, עבור $m=n$ ו- $s=t=2$, נקבל $z(n,n;2,2)\leq c_1\cdot n^{\frac{3}{2}}$. ההערכה הנ"ל היא הדוקה: קיימים גרפים דו צדדיים עם שני צדדים בגודל n, ללא $K_{2,2}=C_n$ עם $c_1\cdot n^{\frac{3}{2}}$ עבור $c_1>0$.

גרפים מישוריים

מבוא (לא פורמלי)

גרף G הוא מישורי אם ניתן לצייר אותו במישור $\mathbb{R}^2$ ללא צלעות חוצות.

הגרסה הפורמלית

<u>הגדרות</u>:

1. **עקומה** – כמו מסילה קציפה מחדו"א. **קטע** – כמו בחדו"א.
2. **עקומה ישרה למקוטעין** היא עקומה המורכבת ממספר סופי של קטעים.
3. **ציור** של גרף $G=(V,E)$ במישור היא פונקציה $\varphi:V\cup E\to\mathbb{R}^2$ המקיימת:
    1. $\forall v_1\neq v_2\in V.\ \varphi(v_1)\neq\varphi(v_2)$, כלומר לקודקודים שונים מתאימות נקודות שונות במישור.
    2. לכל $e=(v_1,v_2)\in E$, $\varphi(e)$ היא עקומה ישרה למקוטעין אשר מחברת בין $\varphi(v_1)$ ל- $\varphi(v_2)$.
4. גרף $G=(V,E)$ נקרא **מישורי** אם קיים לו ציור φ במישור ללא צלעות חוצות.
5. אם נתון ציור φ של גרף מישורי G (ללא צלעות חוצות), אזי נאמר כי φ הוא גרף G **משוכן במישור** (*planed graph*).

<u>דוגמה</u>: K_4 מישורי.

משפט העקומה של ז'ורדן

<u>הקדמה</u>: אם A קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר יחס R על כל הזוגות הסדורים ב- A באופן הבא: $(x,y)\in R$ עבור $x,y\in A$ אם ניתן לחבר בין x ל- y בתוך A על ידי עקומה ישרה למקוטעין. קל לראות כי היחס R הוא יחס שקילות על A. כל מחלקת שקילות של R נקראת **תחום**. אם F תחום, אזי **השפה** של F היא אוסף הנקודות x כך שבכל סביבה של x יש נקודה מ- F ונקודה לא מ- F.

<u>הגדרה</u>: **עקומה פשוטה** היא עקומה שאינה חותכת את עצמה. **עקומה סגורה ופשוטה** היא עקומה סגורה שנחתכת רק בנקודת ההתחלה והסיום.

<u>משפט העקומה של ז'ורדן</u>: תהי c עקומה פשוטה, סגורה וישרה למקוטעין. אזי c מחלקת את $\mathbb{R}^2$ ל- 2 תחומים, כאשר c היא השפה של כל אחד מהם.

<u>הגדרה</u>: יהי G גרף משוכן. **פאה** של G היא תחום של $\mathbb{R}^2\setminus G$.

יש פאה אינסופית (לא חסומה) אחת בדיוק, והיא נקראת **הפאה החיצונית**. שאר הפאות הן **פאות פנימיות**.

שיכון על פני כדור (ספירה)

שיכון של G על S^2 (פני כדור תלת ממדי) הוא שיכון שבו הקודקודים של G עוברים לנקודות של S^2, והצלעות של G לעקומות על S^2 אשר מחברות קודקודים מתאימים.

<u>טענה</u>: אם G הוא גרף מישורי, אזי קיים שיכון של G על פני S^2 ללא צלעות חוצות.

<u>טענה</u>: כל גרף G ניתן לשיכון ב- $\mathbb{R}^3$ ללא צלעות חוצות.

<u>משפט</u> (*Fary*): כל גרף מישורי G ניתן לשיכון ב- $\mathbb{R}^2$, כאשר כל הצלעות של G עוברות לקטעים ישרים.

גרפים דואליים

<u>הגדרה</u>: יהי G גרף משוכן. **הגרף הדואלי** של G, המסומן ב- G^*, הוא הגרף המוגדר באופן הבא: קודקודי G^* הם הפאות של G, ו- $(f_1,f_2)\in E(G^*)$ עבור פאות f_1,f_2 של G אם ב- G קיימת צלע אשר מפרידה בין f_1 ל- f_2. למעשה, לכל צלע ב- $E(G)$ נוסיף ל- $E(G^*)$ צלע המחברת בין שתי הפאות הנמצאות משני צידי הצלע.

<u>טענה</u>: אם G מישורי, אזי G^* מישורי.

הערה: G^* הוא פונקציה לא רק של G, אלא גם של שיכונו.

היחס בין הפרמטרים של G ושל G^*

הקודקודים של G^* הם הפאות של G, ולכן $|V(G^*)|$ הוא מספר הפאות של G. צלע של G $\Leftrightarrow$ צלע של G^*, ולכן $|E(G)|=|E(G^*)|$.

ניתן להראות: אם G קשיר, אזי $(G^*)^*=G$.

הערה: קל לראות כי הגרף הדואלי של גרף משוכן מישורי G גם הוא גרף משוכן מישורי.

נוסחת אוילר

משפט ($Euler - 1758$): גרף מישורי קשיר (ייתכן עם לולאות או צלעות כפולות) עם n קודקודים, e צלעות ו-f פאות מקיים $n-e+f=2$.

הוכחה: באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה - $n=1$: נשים לב כי בגרף הריק על קודקוד אחד מתקיים: $n=1$, $e=0$, $f=1$, ולכן $n-e+f=2$. תוספת של כל לולאה בקודקוד v מוסיפה צלע אחת וגם פאה אחת. לכן, גם אחרי התוספת, היחס נשמר.

צעד האינדוקציה: מכיוון ש-G גרף קשיר, קיימת בו צלע $e=(u,v)$ שהיא אינה לולאה, כלומר $u\neq v$. נכווץ את הצלע e, ונקבל גרף חדש G'. קל לראות כי:

- G' הוא גרף מישורי משוכן.
- $|V(G')|=|V(G)|-1$ ו- $|E(G')|=|E(G)|$.
- כמו כן, מספר הפאות של G' זהה למספר הפאות של G.

לפי הנחת האינדוקציה, אם n',e',f' הם הפרמטרים המתאימים של G', אזי מתקיים $n'-e'+f'=2$, ולכן $(n-1)-(e-1)+f=2$, ולכן $n-e+f=2$.

מש"ל.

מסקנה - משפט:

1. אם G גרף פשוט מישורי על n קודקודים, אזי $|E(G)|\leq 3n-6$.
2. אם בנוסף G הוא חסר משולשים, אזי $|E(G)|\leq 2n-4$.

הוכחה:

1. אם G לא קשיר, נוכל להוסיף לו צלעות ולקבל גרף קשיר מישורי פשוט G' על n קודקודים, כך ש-$G\subseteq G'$. כמו כן, נוכל להניח כי ב-G כל הפאות חסומות על ידי מעגלים (אם לא, נוכל להוסיף צלעות ולקבל גרף מישורי G' המכיל את G על n קודקודים עם יותר צלעות).
   לכן, נניח כי G הוא גרף מישורי פשוט קשיר, שבו השפה של כל פאה היא מעגל. נסמן: $n=|V(G)|$, $e=|E(G)|$ ו- f - מספר הפאות של G. כמו כן, לכל הפאות F_i של G, נסמן ב-S_i את מספר הצלעות במעגל השפה של F_i. אזי מתקיים $n-e+f=2$ (מנוסחת אוילר), ו- $S_1+\cdots+S_f=2e$.
   מכיוון ש-G הוא גרף פשוט, נובע כי $S_i\geq 3$ לכל $1\leq i\leq f$. לכן, $3f\leq 2e$. נציב את אי השוויון הנ"ל בנוסחת אוילר, ונקבל: $n-e+\frac{2e}{3}\geq 2$, ולכן $e\leq 3n-6$.
2. אם G בנוסף חסר משולשים, אזי מתקיים $S_i\geq 4$ לכל $1\leq i\leq f$. לכן, $4f\leq 2e$, ולכן $n-e+\frac{e}{2}\geq 2$, ולכן $e\leq 2n-4$.

מש"ל.

הערה: ההערכות של המשפט הן הדוקות. למשל, K_4 או C_4.

מסקנה: הגרפים K_5 ו- $K_{3,3}$ אינם מישוריים.

הוכחה: $|V(K_5)|=5$ ו- $|E(K_5)|=10>3\cdot 5-6$, ולכן K_5 אינו מישורי. $|V(K_{3,3})|=6$ ו- $|E(K_{3,3})|=9$. כמו כן, $K_{3,3}$ חסר משולשים, $9>2\cdot 6-4$, ולכן $K_{3,3}$ אינו מישורי. מש"ל.

הגדרה: גרף מישורי G נקרא **מקסימלי** אם לא קיים גרף מישורי G' אשר מקיים $V(G)=V(G')$ ו- $E(G)\subset E(G')$.

טענה: יהי G גרף מישורי פשוט עם n קודקודים. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. G מקסימלי.
2. $|E(G)|=3n-6$.
3. כל פאה של G היא משולש.

הוכחה:

2 $\Leftrightarrow$ **3**: נובע מההוכחה של הטענה $|E(G)|\leq 3n-6$.

1 $\Leftrightarrow$ **3**: אם בשיכון של G יש פאה F שהיא לא משולש, נוסיף ל-F את אחד המיתרים, ונקבל גרף מישורי G' כך ש-$G\subset G'$.

מש"ל.

הגדרה: גרף מישורי משוכן G שבו כל פאה חסומה על ידי משולש נקרא **שילוש**.

למה: G מישורי מקסימלי $\Leftrightarrow$ G שילוש.
הערה: ניתן לשלש כל גרף מישורי.
שימוש: מיון של פאונים משוכללים (פאונים אפלטוניים): **פאון** הוא קימור של מספר סופי של נקודות ב- $\mathbb{R}^3$.
בהינתן פאון P , נוכל להגדיר את גרף הפאון $G=G(P)$ באופן טבעי: הקודקודים של G יהיו הקודקודים של P , והצלעות של G תהיינה הצלעות של P . קל לראות כי לכל פאון P , $G(P)$ הוא גרף מישורי.
הגדרה: פאון P נקרא **משוכלל** אם:
1. הגרף $G(P)$ הוא גרף רגולרי.
2. לכל פאה של P יש אותו מספר צלעות בשפה.

בהינתן פאון משוכלל P , נסמן: k - הדרגה ב- $G(P)$, ℓ - אורך של כל פאה (בצלעות), n - מספר הקודקודים של P (ושל $G(P)$), e - מספר הצלעות של P (ושל $G(P)$), f - מספר הפאות של P .
היחסים בין הפרמטרים: $n-e+f=2$, $n\cdot k=2e=\ell\cdot f$ ולכן $e\cdot\left(\frac{2}{k}-1+\frac{2}{\ell}\right)=2$, ולכן $\frac{2}{k}+\frac{2}{\ell}>1$, ולכן $(k-2)(\ell-2)<4$. כמו כן, $k,\ell\geq 3$, והאפשרויות הן כדלקמן:

f	e	n	שם	(k,ℓ)
4	6	4	*thetrahedron*	$(3,3)$
6	12	8	*cube*	$(3,4)$
12	30	20	*dodekahedron*	$(3,5)$
8	12	6	*octahedron*	$(4,3)$
20	30	12	*icosahedron*	$(5,3)$

אפיון של גרפים מישוריים
הגדרות:
1. יהי $G=(V,E)$ גרף ותהי $e=(u,v)$ צלע של G . **העידון** של e ב- G הוא גרף G' המתקבל על ידי הוספת קודקוד חדש w והחלפת הצלע e במסלול (u,w,v) .
2. אם גרף G' מתקבל מגרף G על ידי סדרת עידוני צלעות, אזי G' נקרא **עידון** של G .

עידון לא משנה מישוריות:
- כל עידון של כל גרף מישורי הוא מישורי.
- כל עידון של כל גרף לא מישורי הוא לא מישורי.

משפט (*Kuzatowski – 1930*): גרף G הוא גרף מישורי אם ורק אם הוא לא מכיל עידונים של K_5 או $K_{3,3}$.
צביעת גרפים מישוריים
נזכור: אם G גרף מישורי פשוט על n קודקודים, אזי $|E(G)|\leq 3n-6$. לכן, הדרגה הממוצעת של G קטנה מ- 6 . לכן, קיים $v\in V(G)$ כך ש- $d_G(v)\leq 5$. כמו כן, מכיוון שכל תת גרף $G'\subseteq G$ הוא גם מישורי, גם ב- G' קיים קודקוד $v\in V(G')$ עם $d_{G'}(v)\leq 5$.
מסקנה: כל גרף מישורי הוא 5 -מנוון.
מסקנה: כל גרף מישורי פשוט הוא 6 -צביע.
משפט 5 -הצבעים
משפט (*Heawood – 1890*): כל גרף מישורי פשוט G הוא 5 -צביע.
הוכחה: באינדוקציה על $n=|V(G)|$.
בסיס האינדוקציה: טריביאלי.
צעד האינדוקציה: הוכחנו שבכל גרף מישורי קיים קודקוד בדרגה לכל היותר 5 . יהי אם כן, $v\in V(G)$ עבורו $d_G(v)\leq 5$.
אם $d_G(v)\leq 4$, נצבע את $G'=G\setminus\{v\}$ ב- 5 צבעים לפי האינדוקציה, ואז נשלים את הצביעה לצביעה של G כולו – אפשרי כי ל- v יש לכל היותר 4 שכנים, ולכן יש צבע פנוי בשבילו.
אם $d_G(v)=5$, אזי לפי הנחת האינדוקציה, $G'=G\setminus\{v\}$ הוא 5 -צביע. תהי $c:V(G')\to[5]$ 5 -צביעה של G' .
נניח כי השכנים של v בשיכון של G הם $v_1,\ldots,v_5$ המסודרים סביב v לפי כיוון השעון.
אם ב- c שניים מבין שכניו של v קיבלו את אותו הצבע, אזי ל- v יש צבע פנוי. לכן, נוכל להניח בה"כ כי $c(v_i)=i$ לכל $1\leq i\leq 5$. עבור $1\leq i\neq j\leq 5$, נסמן ב- $C_{i,j}$ את איחוד הצבעים i,j בצביעה c .
אם קיימים $1\leq i\neq j\leq 5$ כך ש- v_i,v_j נמצאים ברכיבי קשירות שונים של $C_{i,j}$, אזי, על ידי החלפת הצבעים i,j ברכיב של v_i , נקבל צביעה c' של G' שצובעת את v_i ואת v_j באותו צבע. אזי נרחיב את c' לצביעה של G כולו כמו קודם.
לכן, נוכל להניח כי ב- $C_{1,3}$ קיים מסלול $P_{1,3}$ בין v_1 ל- v_3 , ובאופן דומה ב- $C_{2,4}$ קיים מסלול $P_{2,4}$ בין v_2 ל- v_4 . לפי משפט העקומה של ז'ורדן, $P_{1,3}$ ו- $P_{2,4}$ נחתכים. מכיוון ש- G גרף מישורי, החיתוך של $P_{1,3}$

ו- $P_{2,4}$ הוא בקודקוד u של G. זאת סתירה, כי $c(u)\in\{1,3\}$ וגם $c(u)\in\{2,4\}$.
מש"ל.

משפט ארבעת הצבעים

<u>משפט</u>: כל גרף מישורי פשוט G הוא 4-צביע.

בשנת 1852, *Francis Guthñe* שאל האם כל מפה מישורית היא 4-צביעה. בשנת 1878, *Cayley* פרסם את השלה. בשנת 1879 *Kempe* פרסם הוכחה לא נכונה של משפט 4-הצבעים.

<u>משפט</u> (*Appel Hadim – 1977*): כל גרף מישורי פשוט G הוא 4-צביע.

<u>הוכחה</u>: ארוכה וכוללת שימוש מסיבי במחשב. הוכחה יותר פשוטה ניתנה על ידי *Robertson*, *Sanders*, *Seymous*, *Thomas* ב-1997.

מספר ההצלבה של גרף

<u>הגדרות</u>:

1. בהינתן גרף G משוכן במישור $\mathbb{R}^2$, **הצלבה** ב-G היא זוג של צלעות הנחתכות באופן לא טריביאלי (כלומר לא בקודקוד משותף).
2. בהינתן גרף G, **מספר ההצלבה** של G, המסומן ב-$Cr(G)$, הוא המספר המזערי של הצלבות בשיכון של G במישור.

<u>טענה</u>: $Cr(G)=0 \Leftrightarrow G$ גרף מישורי.

<u>טענה</u>: לכל גרף G מתקיים $Cr(G)\geq|E(G)|-3|V(G)|$.

<u>הוכחה</u>: נסתכל על השיכון של G במישור עם $Cr(G)$ הצלבות. לכל זוג של צלעות מצטלבות בשיכון, נוריד צלע אחת שרירותית. נתבונן בגרף G' עם $|V(G)|=|V(G')|$ ו- $|E(G')|\geq|E(G)|-Cr(G)$. G' הוא גרף מישורי. לכן, נובע $|E(G')|\leq3|V(G')|-6=3|V(G)|-6$. קיבלנו בסך הכל: $|E(G)|-Cr(G)\leq|E(G')|\leq3|V(G)|-6$, ולכן $Cr(G)\geq|E(G)|-3|V(G)|+6\geq|E(G)|-3|V(G)|$. מש"ל.

<u>משפט</u> (*Ajtai*, *Chvátal*, *Newtorn*, *Szemerédi*, *Lerghton – 1913*): יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט עם $|V|=n$ קודקודים ו- $|E|=m$ צלעות. נניח כי $m\geq4n$. אזי $Cr(G)\geq\frac{m^3}{64n^2}$.

<u>הוכחה</u>: קודם כל, נשים לב כי בשיכון של G עם $Cr(G)$ הצלבות, לא קיימות שתי צלעות מצטלבות e_1,e_2 להן קודקוד משותף. נקבע שיכון של G במישור עם $Cr(G)$ הצלבות.
נבנה תת גרף מקרי G של G באופן הבא: לכל קודקוד $v\in V(G)$, $P(v\in V(H))=p$ באופן ב"ת בקודקודים האחרים. $E(H)=G[V(H)]=\{e\in E(G)|e\subseteq V(H)\}$.
נגדיר שלושה משתנים מקריים X,Y,Z באופן הבא: $X=|V(H)|$, $Y=|E(H)|$, $Z=Cr(H)$. תמיד מתקיים $Z\geq Y-3X$ (מהטענה הקודמת). ניקח תוחלת של שני האגפים של אי השוויון הלינארי, ונקבל $E(Z)\geq E(Y)-3E(X)$.
מצד אחד, $E(x)=np$ (מ"מ בינומי). מצד שני, $E(Y)=mp^2$ (כל צלע של G נופלת לתוך H בהסתברות p^2). על מנת להעריך את $E(Z)$, נשתמש בשיכון של G שקבענו, ובשיכון של H המושרה על ידי השיכון של G. נשים לב כי כל הצלבה בשיכון של G שורדת ועוברת ל-H בהסתברות p^4 ולכן, $E(Z)\leq Cr(G)\cdot p^4$.
קיבלנו: $Cr(G)\cdot p^4\geq E(Z)\geq E(Y)-3E(X)=mp^2-3np$. לכל $0\leq p\leq1$ מתקיים $Cr(G)\geq\frac{m}{p^2}-\frac{3n}{p^3}$. נבחר $p=\frac{4n}{m}$ (ואז $0\leq p\leq1$ כי הנחנו $m\geq4n$). אזי: $Cr(G)\geq\frac{m}{\left(\frac{4n}{m}\right)^2}-\frac{3n}{\left(\frac{4n}{m}\right)^3}=\frac{m^3}{16n^2}-\frac{3m^3}{64n^2}=\frac{m^3}{64n^2}$.

מש"ל.

<u>מסקנה</u> אם $G=K_n$ אזי $c_1n^4\leq Cr(G)\leq c_2n^4$ עבור $c_1,c_2>0$ קבועים.

<u>הוכחה</u>: חסם תחתון נובע מהמשפט ($m=\binom{n}{2}$). חסם עליון: מספר החיתוכים בכל שיכון של G לא עולה על מספר זוגות הצלעות $\binom{\binom{n}{2}}{2}\leq c_2n^4$. מש"ל.