אלגברה ב2

ארזים ©

23 במאי 2017

תרגיל חשבו את $\text{Gal}\left(x^3+x+3/\mathbb{Q}\right)$.

פתרון הפולינום אי פריק מקריטריון השורש הרציונלי - אין לו שורש. לכן, חבורת גלואה שלו היא תת חבורה של S_3, שהיא טרנזיטיבית. מכאן נובע כי

$$\text{Gal}\left(x^3+x+3/\mathbb{Q}\right) =: G \in \{A_3, S_3\}$$

כי תת החבורות האחרות הן $\{1,\sigma\}$ עבור שיקוף σ כלשהו, וחבורה זו לא נוגעת באיבר שבו σ לא נוגע. נסמן L את שדה הפיצול של x^3+x+3 מעל $\mathbb{Q}$, ונשים לב כי

$$L \not\subseteq \mathbb{R}$$

שהרי לפולינום x^3+x+3 יש רק שורש ממשי אחד. נוכל להגדיר $\sigma = (z \mapsto \overline{z})\,|_L$, הצמצום של ההצמדה המרוכבת אל $L \subseteq \mathbb{C}$. נשים לב כי σ פועלת על שורשי הפולינום בתור חילוף - מחליפה את שני שני השורשים המרוכבים. לכן בהכרח $G = S_3$, כי σ אי זוגית.

תזכורת ניקח

$$f = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$$
$$g = \sum_{j=0}^{e} b_i x^i$$

פולינומים מעל שדה K. מגדירים

$$\text{Res}\left(f,g\right) = a_d^e a_e^d \prod_{f(x)=0, g(y)=0} (x-y) \in K$$

תכונות:

$$\text{Res}\left(a_0, g\right) = a_0^e$$
$$\text{Res}\left(x-a, x-b\right) = a-b$$
$$\text{Res}\left(f,g\right) = (-1)^{ed}\,\text{Res}\left(g,f\right)$$
$$\text{Res}\left(fg,h\right) = \text{Res}\left(f,h\right)\text{Res}\left(g,h\right)$$

ניתן לחשב את הרזולטנטה בעזרת הדטרמיננטה של מטריצת סילבסטר, שהגדרנו בהרצאה. אז מגדירים

$$\mathrm{Disc}\left(f\right)=\frac{\left(-1\right)^{\frac{d(d-1)}{2}}}{a_d}\mathrm{Res}\left(f,f'\right)$$

ואפשר לכתוב גם

$$\mathrm{Disc}\left(f\right)=\left(-1\right)^{\frac{d(d-1)}{2}}a_d^{2d-2}\prod_{i\neq j}\left(r_i-r_j\right)$$

כאשר $\{r_i\}$אוסף השורשים של f עם חזרות.ניזכר שראינו שחבורת גלואה של פולינום מוכלת בתוך A_d אם ורק אם $\mathrm{Disc}\left(f\right)$ היא ריבוע.

משפט 0.1 יהי $a\in\mathbb{Z}$. אזי

$$\mathrm{Gal}\left(x^3+ax+1/\mathbb{Q}\right)=\begin{cases}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & a=0,-2\\ A_3 & a=-3\\ S_3 & otherwise\end{cases}$$

הוכחה: השורשים הפוטנציאליים הם ±1. נציב:

$$0=1^3+a+1\iff a=-2$$
$$0=\left(-1\right)^3-a+1\iff a=0$$

במקרים אלה ברור כי חבורת גלואה היא $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, כי הפולינום מתפרק לפולינום לינארי כפול פולינום ריבועי אי פריק.

מעתה נניח כי f, הפולינום, אי פריק. נחשב:

$$\mathrm{Disc}\left(f\right)=-4a^3-27$$

אם $a=-3$, נקבל

$$\mathrm{Disc}\left(f\right)=81=9^2$$

לכן הדיקרימיננטה היא ריבוע, כלומר החבורה מוכלת בתוך A_3 - אבל הפולינום אי פריק, ולכן זו A_3 או S_3. נותר המקרה בו $a\neq0,-2,-3$. נראה כי $\mathrm{Disc}\left(f\right)$ אינה ריבוע. נניח בשלילה כי

$$-4a^3-27=s^2$$

עבור $s\in\mathbb{Q}$ כלשהו - וברור שאז $s\in\mathbb{Z}$ אפילו. ראשית, ברור שכאשר $a>0$, הביטוי הזה שלילי ולכן אינו ריבוע. נסמן $t=-a$, ונניח שהוא חיובי ושהוא לפחות 4 - במקרים האלה פשוט בודקים ורואים שזה לא ריבוע. לכן $t\geq 4$ ומתקיים

$$s^2=4t^3-27$$

נשים לב כעת כי $(s-9)^3+(6t)^3=(s+9)^3$ - ניווכח:

$$\begin{aligned}(s+9)^3-(s-9)^3 &= 18\left(\left(s^2+18s+81\right)+s^2-81+\left(s^2-18s+81\right)\right)= \\ &= 18\left(3s^2+81\right)=18\left(12t^3-81+81\right)=216t^3=(6t)^3\end{aligned}$$

ממשפט פרמה האחרון (המקרה $n=3$, שאינו מסובך כמו המשפט כולו), נובע כי $s-9\leq 0$, ולכן $s\leq 9$. זו סתירה, כי $t\geq 4$, ואם מציבים מקבלים שאגף ימין הוא לפחות $256-27>81=9^2$. ■

תרגיל חשבו את

$$\operatorname{Gal}\left({}^{x^4-4x^2-1}/_{\mathbb{Q}}\right)$$

פתרון השורשים הם

$$\pm\sqrt{2\pm\sqrt{5}}$$

שדות הפיצול נראים כמו:

$$\begin{tikzcd}
 & L=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{5}},\sqrt{2-\sqrt{5}}\right) \arrow[dl, dash, "2"] \arrow[dd, dash, "4"] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
\mathbb{Q}\left(\sqrt{2-\sqrt{5}}\right) \arrow[dr, dash, "2"] & & \mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}\right) \arrow[dl, dash, "2"] \\
 & \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right) \arrow[d, dash, dashed, "2"] & \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

כאשר L הוא שדה הפיצול של הפולינום. לכן נקבל שגודל החבורה הוא 8, מכלל המגדל. כל שיכון חייב לקיים

$$\alpha=\sqrt{2+\sqrt{5}}\mapsto\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{5}}$$
$$\beta=\sqrt{2-\sqrt{5}}\mapsto\varepsilon_3\sqrt{2-\varepsilon_2\sqrt{5}}$$

נשים לב שמתקיים

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4$$
$$\sigma(\alpha)^2 + \sigma(\beta)^2 = 4$$

יש התאמה חד־חד־ערכית ועל בין חבורת גלואה לבין $\{\pm 1\}^3$ בגלל זה. נוכל להגדיר

$$\rho(\alpha) = \beta$$
$$\rho(\beta) = -\alpha$$
$$\varepsilon(\alpha) = -\alpha$$
$$\varepsilon(\beta) = \beta$$

ואז שמים לב שמתקיים $\rho\varepsilon = \varepsilon\rho^3$, ולכן החבורה היא D_8.