אלגברה ב2

© ארזים

16 במאי 2017

נראה דוגמה לכל מיני דברים שלמדנו. נתבונן בהרחבה $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$, כאשר $\zeta = \zeta_7 = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. הפולינום המינימלי מעל $\mathbb{Q}$ הוא

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

ולכן המעלה של ההרחבה היא 6. חבורת גלואה היא $\operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}\right) \cong \left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\right)^* = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. האיזומורפיזם האחרון מתקבל על ידי בחירת יוצר, למשל 5. נסמן את השיכונים $\{\sigma_i\}$, כאשר $\sigma_i(\zeta) = \zeta^i$.

נתבונן בסריג תתי החבורות של חבורת גלואה:

$$\begin{tikzcd}
& \{1\} \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] & \\
\{1,2,4\} \arrow[dr, "2"'] & & \{1,6\} \arrow[dl, "3"] \\
& (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* &
\end{tikzcd}$$

בעזרת התאמת גלואה, נתאים בין תת חבורה H לשדה $\mathbb{Q}(\zeta)^H$. סריג תת ההרחבות הוא:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}(\zeta) & \\
\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^2+\zeta^4) \arrow[ur, "3"] & & \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^6) \arrow[ul, "2"'] \\
& \mathbb{Q} \arrow[ul, "2"] \arrow[ur, "3"'] &
\end{tikzcd}$$

ראשית נוכיח שההרחבה שמצאנו מסדר 3 נכונה. ברור שהאיבר $\zeta + \zeta^6$ מקובע על ידי $\{1,6\}$. כדי להראות שהוא יוצר את ההרחבה המתאימה לחבורה זו, מספיק להראות $\zeta+\zeta^6 \notin \mathbb{Q}$ - כי אחרת המעלה שלו מחלקת את 3, כי $\mathbb{Q}\left(\zeta+\zeta^6\right)$ חלקית להרחבה מסדר 3. ינבע שהסדר הוא 3. אם $\zeta+\zeta^6 \in \mathbb{Q}$, נחסר אותו מהמספר $\zeta^6+\zeta^5+\zeta^4+\zeta^3+\zeta^2+\zeta+1 \in \mathbb{Q}$ ולקבל פולינום ממעלה 5 שאותו ζ מאפס מעל $\mathbb{Q}$ - בסתירה לכך שהמעלה שלו 6. לכן סיימנו.

עבור ההרחבה השנייה, שוב ברור שהאיבר שבחרנו מקובע על ידי החבורה $\{1,2,4\}$. האיבר הזה אינו רציונלי, כי המעלה של ζ היא 6, ולכן נובע שהמעלה של ההרחבה שהוא יוצר היא לפחות 2 ־ אבל זו תת הרחבה של הרחבה מסדר 2 (ההרחבה שמתאימה לחבורה) ולכן הוא יוצר את ההרחבה.

במצב זה כתבנו גם

$$S_6 \geq \mathrm{Gal}\left(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right) \cong \left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\right)^*$$

בתוך S_6 נמצא את החבורה הזו בתור $\langle(1,2,3,4,5,6)\rangle$ ־ החבורה הציקלית מסדר 6 בתוך S_6.

משפט 0.1 הרחבת שדות סופית L/K היא פשוטה אם ורק אם יש רק מספר סופי של שדות ביניים $K\subseteq R\subseteq L$.

הוכחה: נניח כי $L=K\left(\alpha\right)$. לכל $K\subseteq R\subseteq L$ נתאים את הפולינום האופייני של α מעל R. ברור כי $\left(\mathrm{irr}\alpha,R\right)\mid\mathrm{irr}\left(\alpha,K\right)$, ולכן בתמונה של ההתאמה שלנו בין הרחבות לפולינומים יש רק מספר סופי של איברים.

נותר להראות שההעתקה שלנו חד־חד־ערכית. נגדיר את R_0 להיות השדה שנוצר על ידי K והמקדמים של $\mathrm{irr}\left(\alpha,R\right)$. נרצה להראות $R=R_0$. אנחנו יודעים שמתקיים $[L:R]=\deg\mathrm{irr}\left(\alpha,R\right)$. כמו כן, ברור כי $\mathrm{irr}\left(\alpha,R\right)\in R_0\left[x\right]$, כי ככה R_0 הוגדר. אם כן, $[L:R_0]=[R_0\left(\alpha\right):R_0]\leq\mathrm{deg irr}\left(\alpha,R\right)$, ואז

$$\deg\mathrm{irr}\left(\alpha,R\right)\geq[L:R_0]=[L:R]\left[R:R_0\right]=\deg\mathrm{irr}\left(\alpha,R\right)\left[R:R_0\right]$$

קיבלנו

$$[R:R_0]\leq 1$$

ולכן $R=R_0$.

בכיוון השני, נניח שיש מספר סופי של שדות ביניים. אם השדה K סופי, הטענה ברורה, ולכן נניח כי K אינסופי. נרצה למצוא איבר שיוצר את ההרחבה. די למצוא $\alpha\in L$ שלא נמצא באף שדה ביניים $K\subseteq R\subsetneq L$. באופן שקול, די להראות כי איחוד כל אותם שדות ביניים (המוכלים ממש בתוך L) אינו L, אלא מוכל ממש בו. זה נובע מלמה כללית:

למה 0.2 יהי V מרחב ווקטורי מעד שדה אינסופי F, ויהיו $V_1,\ldots,V_n\subsetneq V$. אזי

$$\bigcup_{i=1}^{n}V_i\subsetneq V$$

הוכחה: נניח כי האיחוד הוא מינימלי (כלומר אין איברים מיותרים). בשלילה, נניח שהוא שווה לכל המרחב V. קיים $x\in V_1$ כך שלכל $i\neq 1$ מתקיים $x\notin V_i$. בנוסף, קיים $y\notin V_1$. נתבונן באיברים מהצורה $x+\alpha y$, כאשר $\alpha\in F^*$ סקלר הפיך. ברור כי $x+\alpha y\notin V_1$, ומאינסופיות F נקבל שקיים i וקיימים $\alpha_1\neq\alpha_2$ עבורם

$$x+\alpha_1 y,x+\alpha_2 y\in V_i$$

נחסר ביניהם ונקבל

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\, y \in V_i$$

ומכאן $y \in V_i$. מכאן נקבל כי $x \in V_i$, וזו סתירה. ■

■

מסקנה 0.3 (משפט האיבר הפרימיטיבי) אם ${}^{L}/_{K}$ פרידה אזי היא פשוטה.

הוכחה: ניקח הרחבה סופית ${}^{N}/_{L}$ כך שההרחבה ${}^{N}/_{K}$ גלואה. שדות ביניים של ${}^{N}/_{K}$ מתאימים לתת חבורות של $\mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{K}\right)$, שהיא סופית - לכן יש מספר סופי של שדות ביניים בין N, K, ובפרט בין L, K. לכן נובע מהמשפט הקודם שההרחבה פשוטה. ■

טענה 0.4 ההרחבה ${}^{\mathbb{F}_p\left(\sqrt[p]{x},\, \sqrt[p]{y}\right)}/_{\mathbb{F}_p(x,y)}$ אינה פשוטה.

הוכחה: נשים לב שמעלת ההרחבה היא p^2, אבל לכל $a \in \mathbb{F}_p\left(\sqrt[p]{x},\, \sqrt[p]{y}\right)$ מתקיים $a^p \in \mathbb{F}_p\left(x, y\right)$ - כי העלאה בחזקת p זה הומומורפיזם, והטענה נכונה למשתנים $\sqrt[p]{x},\, \sqrt[p]{y}$. לכן, אם היה w המקיים $\mathbb{F}_p\left(\sqrt[p]{x},\, \sqrt[p]{y}\right) = \mathbb{F}_p\left(x, y\right)(w)$, אזי מעלת ההרחבה הייתה לכל היותר p, בסתירה. ■