אלגברה ב2

ⓒ ארזים

28 במרץ 2017

1 הרחבת שדות

תהי L/K הרחבת שדות. הגדרנו מעלה:

$$[L:K] = \dim_K L$$

אפשר לקבל הרחבה של K על ידי לקיחת $f \in K[x]$ אי פריק והגדרת $L = K[x]/(f)$.
דרך נוספת: עבור $\alpha \in \Omega$ נגדיר

$$K(\alpha) = \{q(\alpha) \mid q \in K(x)\}$$

כאשר Ω הוא שדה גדול שמכיל את K. זהו שדה, ואפשר להגדיר גם חוג:

$$K[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f \in K[x]\}$$

$\alpha \in L$ ייקרא אלגברי מעל K אם יש $0 \neq f \in K[x]$ כך שמתקיים $f(\alpha) = 0$. זה שקול לכך שמתקיים $K[\alpha] = K(\alpha)$, או לכך שמתקיים

$$[K(\alpha):K] < \infty$$

L/K תיקרא אלגברית אם כל $\alpha \in L$ אלגברי מעל K.
עבור $\alpha \in L$ אלגברי מעל K, קיים ויחיד פולינום מתוקן ואי פריק $f \in K[x]$ המקיים $f(\alpha) = 0$, ומעלתו $[K(\alpha):K]$. f נקרא הפולינום המינימלי של α (או הפולינום האי פריק של α). הוא יסומן

$$\operatorname{irr}(\alpha, K) = \operatorname{irr}_K^{\alpha}(x)$$

כמו כן מתקיים

$$K(\alpha) \cong K[x]/(f)$$

תרגיל נגדיר $\zeta_8 = e^{\frac{2\pi i}{8}}$.

1. חשבו את $[\mathbb{Q}[\zeta_8] : \mathbb{Q}]$.
2. הראו כי $\mathbb{Q}[\zeta_8] = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right)$.
3. חשבו את $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}, i\right) : \mathbb{Q}(\zeta_8)\right]$.

פתרון

1. ζ_8 מקיים את $x^8 - 1 = \left(x^4-1\right)\left(x^4+1\right)$. אנחנו יודעים כי x^4+1 אי פריק מעל $\mathbb{Q}$, ומאפס את ζ_8. לכן $[\mathbb{Q}[\zeta_8] : \mathbb{Q}] = 4$.
2. ראינו כי

$$\zeta_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

לכן בבירור $\zeta_8 \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right)$. לכן ברור כי $\mathbb{Q}(\zeta_8) \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right)$. נתבונן במגדל

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)(i) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right)$$

שתי ההרחבות כאן מסדר 2, ולכן נובע

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) : \mathbb{Q}\right] = 2 \cdot 2 = 4$$

כעת נתבונן במגדל

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_8) \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right)$$

ההרחבה הראשונה ממעלה 4, וגם ההרחבה הגדולה היא ממעלה 4 כפי שראינו הרגע. לכן $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) : \mathbb{Q}(\zeta_8)\right] = 1$, כלומר

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) = \mathbb{Q}(\zeta_8)$$

3. נתבונן במגדל $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}\right) \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}, i\right)$. ההרחבה השנייה היא שוב ממעלה 2 (דומה למה שראינו קודם). ההרחבה הראשונה ממעלה 4 - הפולינום $x^4 - 2$ מאפס את $\sqrt[4]{2}$ והוא אי פריק לפי איזנשטיין. לכן, נובע כי

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}, i\right) : \mathbb{Q}\right] = 8$$

בעזרת המגדל $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}, i\right)$ נקבל כי

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}, i\right) : \mathbb{Q}(\zeta_8)\right] = 2$$

תרגיל הראו כי

$$E := \mathbb{Q}\left(\sqrt[7]{5}\right) \cap \mathbb{Q}\left(\sqrt[5]{7}\right) = \mathbb{Q}$$

פתרון אינטואיציה בציור:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}\left(\sqrt[5]{7}\right) \arrow[dr, dash, "y"] \arrow[ddr, dash, "5"'] & xy{=}7 \quad xz{=}5 & \mathbb{Q}\left(\sqrt[7]{5}\right) \arrow[dl, dash, "z"'] \arrow[ddl, dash, "7"] \\
& \mathbb{Q}\left(\sqrt[5]{7}\right) \cap \mathbb{Q}\left(\sqrt[7]{5}\right) \arrow[d, dash, "x"] & \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

נשים לב כי $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[7]{5}\right) : \mathbb{Q}\right] = 7$, כי $x^7 - 5$ אי פריק לפי איזנשטיין. באופן דומה $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[5]{7}\right) : \mathbb{Q}\right]$. מכלל המגדל,

$$[E : \mathbb{Q}]\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[7]{5}\right) : E\right] = \left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[7]{5}\right) : \mathbb{Q}\right]$$

ולכן $5 \mid [E : \mathbb{Q}]$. באותה צורה נקבל שהוא מחלק את 7, ולכן הוא 1.

תרגיל חשבו את

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3+\sqrt{7}}\right) : \mathbb{Q}\right]$$

פתרון גרסה 1: נשים לב כי הפולינום $\left(x^2-3\right)^2 - 7 = x^4 - 6x^2 + 2$ מתאפס על $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ ואי פריק (איזנשטיין), לכן המעלה היא 4.
גרסה 2: נשים לב כי במגדל $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{7}\right) \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{3+\sqrt{7}}\right)$, ההרחבה הראשונה ממעלה 2, והשנייה לא ממעלה 1, כי $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ מקיים את $x^2 - \left(3+\sqrt{7}\right)$ מעל $\mathbb{Q}\left(\sqrt{7}\right)$. כלומר די להראות כי $\left(a+b\sqrt{7}\right)^2 \neq 3+\sqrt{7}$. אפשר להראות את זה אבל זה מסובך.