אלגברה ב2

ארזים ©

19 באפריל 2017

נמשיך מאיפה שעצרנו בשיעור שעבר.

משפט 0.1 (כפליות של מעלות פרידות) יהי $K \subseteq L \subseteq E$ מגדל של הרחבות סופיות. אזי

$$[E:K]_s = [E:L]_s \, [L:K]_s$$

הוכחה: נצטרך שתי למות.

למה 0.2 בהנתן מגדל של הרחבות סופיות $K \subseteq L \subseteq E$ ובהנתן שיכון $\rho \in \mathrm{Emb}_K\left(L, \overline{K}\right)$, ניתן להרחיב אותו לשיכון $\hat{\rho} \in \mathrm{Emb}_K\left(E, \overline{K}\right)$. כלומר העתקת הצמצום

$$\mathrm{res}_{E,L} : \mathrm{Emb}_K\left(E, \overline{K}\right) \to \mathrm{Emb}_K\left(L, \overline{K}\right)$$

הוכחה: (המרצה מסמן פונקציות מימין) ההרחבה ${}^{E}\!/_{L}$ סופית, ולכן נוכל לרשום

$$E = L\left(a_1, \ldots, a_n\right)$$

כעת, נסתכל במגדל

$$K \subseteq L \subseteq L\left(a_1\right) \subseteq \cdots \subseteq L\left(a_1, \ldots, a_n\right) = E$$

לכן די להוכיח את הלמה עבור $E = L\left(a\right)$. נניח זאת. נסמן כעת

$$f = \mathrm{irr}\left(a, L\right) \in L\left[x\right]$$

נרחיב את ρ להומומורפיזם:

$$\tilde{\rho} : L\left[x\right] \to \rho\left(L\right)\left[x\right]$$

על ידי

$$\tilde{\rho}\left(\sum w_i x^i\right)=\sum \rho\left(w_i\right) x^i$$

ברור כי $\tilde{\rho}$ הומומורפיזם חד־חד־ערכי (כי ρ חד־חד־ערכי) ועל (כי ρ על). נקח $b \in \overline{K}$ שהוא שורש של $\tilde{\rho}\left(f\right)$, כלומר $\tilde{\rho}\left(f\right)\left(b\right)=0$. נסמן

$$\rho'=Sp_b \circ \tilde{\rho}$$

כאשר Sp היא ההצבה. כלומר

$$\rho'\left(f\left(x\right)\right)=Sp_b\left(\tilde{\rho}\left(f\left(x\right)\right)\right)=\tilde{\rho}\left(f\right)\left(b\right)$$

לפי משפטי האיזומורפיזם נקבל שאם $\ker Sp_a \subseteq \ker \rho'$, אזי ρ' מתפרק דרך E. אכן:

$$\ker \rho'=\tilde{\rho}^{-1}\left(\ker Sp_b\right)=\tilde{\rho}^{-1}\left(\left(\tilde{\rho}\left(f\right)\right)\right)=\left(f\right)=\ker Sp_a$$

לכן ρ' מתפרק דרך E על ידי

$$\hat{\rho}: E=L\left(a\right) \rightarrow \rho\left(L\right)\left(b\right) \subseteq \overline{K}$$

כאשר $\alpha \in L$ מתקיים

$$\hat{\rho}\left(a\right)=\rho'\left(a\right)=Sp_b\tilde{\rho}\left(a\right)=\rho\left(a\right)$$

ולכן $\hat{\rho}$ אכן מרחיב את ρ.
תרשים של מה שעשינו:

$$\begin{tikzcd}
L[x] \arrow[r, "\tilde{\rho}"] \arrow[d, "Sp_a"] \arrow[dr, dashed, "\rho'"] & \rho(L)[x] \arrow[d, "Sp_b"] \\
E=L(a) \arrow[r, dashed, "\hat{\rho}"] & \rho(L)(b) \subseteq \overline{K}
\end{tikzcd}$$

■

הגדרה 0.3 הרחבה סופית N/K נקראת נורמלית אם, כשניקח $N \subseteq \overline{K}$, אז לכל $\sigma \in \operatorname{Emb}_K\left(N, \overline{K}\right)$ מתקיים $\sigma\left(N\right)=N$.

דוגמאות $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ נורמלית, כי שני השיכונים נתונים על ידי $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$, $\sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2}$.
ההרחבה $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ אינה נורמלית ־ יש שיכון הנתון על ידי $\sqrt[3]{2} \rightarrow \zeta_3\sqrt[3]{2}$ שאינו שומר את ההרחבה.

למה 0.4 תהי L/K הרחבה סופית. אזי קיימת הרחבה נורמלית סופית N/K המכילה את L.

הוכחה: נקח את N להיות ההרחבה המינימלית של K בתוך $\overline{K}$ שמכילה את $\sigma(L)$ לכל $\sigma \in \mathrm{Emb}_K\left(L,\overline{K}\right)$. יש כמות סופית של שיכונים, כלומר יש כמות סופית של $\sigma(L)$ שונים, ולכן N/K סופית.

נותר להוכיח כי זו הרחבה נורמלית. אם נקח $\sigma : N \to \overline{K}$ שיכון עם $\sigma\mid_K = \mathrm{id}$, אזי

$$\sigma\mid_L(L) \subseteq \sigma(N)$$

וכמובן שלכל $\rho \in \mathrm{Emb}_K\left(L,\overline{K}\right)$ מתקיים

$$\sigma(\rho(L)) \subseteq \sigma(N)$$

$\sigma(N)$ למעשה נוצר על ידי $\sigma(\rho(L))$. כמובן שמתקיים

$$\{\rho(L)\} \supseteq \{\sigma(\rho(L))\}$$

לכן נקבל $\sigma(N) \subseteq N$. אבל $[N:K] = [\sigma(N):N]$, כי σ איזומורפיזם, ולכן $\sigma(N) = N$. ■

אנחנו סופסוף מוכנים להוכחת המשפט.

יש לנו מגדל $K \subseteq L \subseteq E$ של הרחבות סופיות. נשים לב כי $\overline{L} = \overline{K}$. נגדיר

$$\Phi : \mathrm{Emb}_K\left(E,\overline{K}\right) \to \mathrm{Emb}_K\left(L,\overline{K}\right) \times \mathrm{Emb}_L\left(E,\overline{K}\right)$$

די יהיה להראות כי Φ חד־חד־ערכית ועל. לפי הלמה השנייה, יש הרחבה נורמלית N/K המכילה את E. כעת, לכל $\rho \in \mathrm{Emb}_K\left(L,\overline{K}\right)$ נוכל לפי הלמה הראשונה לבחור הרחבה $\hat{\rho} \in \mathrm{Emb}_K\left(N,\overline{K}\right)$. N נורמלית, ולכן

$$\hat{\rho} = \mathrm{Emb}_K(N,N)$$

כעת, בהנתן $\sigma \in \mathrm{Emb}_K\left(E,\overline{K}\right)$, נסמן $\rho = \sigma\mid_L$, ונגדיר

$$\Phi(\sigma) = \left(\rho, \hat{\rho}^{-1}\sigma\mid_E\right)$$

נראה כי הקואורדינטה הימנית אכן משביתה את L (ברור שזה שיכון של E לתוך $\overline{K}$): עבור $x \in L$ מתקיים

$$\hat{\rho}^{-1}(\sigma(x)) = \hat{\rho}^{-1}(\rho(x)) = \hat{\rho}^{-1}(\hat{\rho}(x)) = x$$

נראה כי Φ חד־חד־ערכית:

$$\Phi(\sigma) = \Phi(\tau)$$
$$\sigma\mid_L = \tau\mid_L =: \rho$$
$$\hat{\rho}^{-1}\sigma = \hat{\rho}^{-1}\tau \Rightarrow \sigma = \tau$$

נותר להראות כי Φ על. יהי (ρ, ι) בטווח. נגדיר

$$\sigma = (\hat{\rho}\iota)\mid_E$$

כעת בבירור

$$\sigma\mid_L = (\hat{\rho}\iota)\mid_L = \hat{\rho}\mid_L = \rho$$

וכן

$$\iota = \left(\hat{\rho}^{-1}\sigma\right)\mid_E$$

וסיימנו. ■

הגדרה 0.5 תהי ${}^{L}/_{K}$ הרחבה סופית. נסמן $\mathrm{Aut}_K(L)$ את אוסף האוטומורפיזמים של L שמשביתים את K. זו חבורה.

1. נאמר כי ${}^{L}/_{K}$ <u>פרידה</u> אם $[L:K]_s = [L:K]$.
2. נאמר כי ${}^{L}/_{K}$ <u>נורמלית</u> אם $|\mathrm{Aut}_K(L)| = [L:K]_s$.
3. נאמר כי ${}^{L}/_{K}$ <u>גלואה</u> אם היא פרידה ונורמלית, כלומר $|\mathrm{Aut}_K(L)| = [L:K]$. במצב זה נסמן

$$\mathrm{Gal}\left({}^{L}/_{K}\right) \coloneqq \mathrm{Aut}_K(L)$$

ונקרא לחבורה הזו <u>חבורת גלואה</u> של L מעל K.

משפט 0.6 במגדל של הרחבות סופיות $K \subseteq L \subseteq E$ מתקיים ${}^{E}/_{K}$ פרידה אם ורק אם ${}^{E}/_{L}$ וגם ${}^{L}/_{K}$ פרידות.

הוכחה: נובע מיידית מהכפליות של שני סוגי המעלות, ומאי השוויון ביניהן. ■

הגדרה 0.7 יהי K שדה ויהי $f \in K[x]$ ממעלה חיובית.

1. נאמר כי f <u>פריד</u> אם אין לו שורשים כפולים בתוך $\overline{K}$ (או בכל הרחבה שדות ${}^{L}/_{K}$, באופן שקול).

2. נאמר כי $\alpha \in L$ פריד מעל K אם $\operatorname{irr}(\alpha, K)$ פריד, כאשר L/K הרחבה.
3. נאמר כי f מתפצל מעל הרחבה L/K אם קיימים $c, \alpha_i \in L$ המקיימים

$$f = c \cdot \prod_i (x - \alpha_i)$$

4. L/K נקרא שדה פיצול של f אם f מתפצל מעליו, וכן L נוצר על ידי שורשי f.

טענה 0.8 (הקשר בין פולינומים לשדות) תהי L/K הרחבה סופית.

1. $\alpha \in L$ פריד מעל K אם ורק אם $K(\alpha)/K$ פרידה.
2. L/K פרידה אם ורק אם כל $\alpha \in L$ הוא פריד מעל K.
3. L/K נורמלית אם ורק אם לכל $\alpha \in L$, הפולינום $\operatorname{irr}(\alpha, K)$ מתפצל מעליה.
4. אם L/K שדה פיצול של פולינום $f \in K[x]$ אזי L/K נורמלי.
5. אם L/K שדה פיצול של פולינום פריד אזי L/K גלואה.

הוכחה: בשבוע הבא. ■