אלגברה ב2

© ארזים

5 באפריל 2017

ניזכר בהגדרה:

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^k & n=p_1\cdots p_k,\gcd(p_i,p_j)=1\\ 0 & \text{o/w}\end{cases}$$

טענה 0.1 מתקיים

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

הוכחה: נכתוב

$$n=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$$

פירוק למכפלת ראשוניים שונים. אזי

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|p_1\cdots p_k}\mu(d)=\sum_{S\subseteq\{1,\ldots,k\}}(-1)^k=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-1)^r=((-1)+1)^k=0$$

■

משפט 0.2

$$\pi_p(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)p^d$$

הוכחה: נשים לב שמתקיים

$$p^n=|\mathbb{F}_{p^n}|=\left|\bigcup_{d|n}\{\alpha\in\mathbb{F}_{p^n}\mid[\mathbb{F}_p[\alpha]:\mathbb{F}_p]=d\}\right|=\sum_{d|n}|\{\alpha\in\mathbb{F}_{p^n}\mid[\mathbb{F}_p[\alpha]:\mathbb{F}_p]\}|=$$
$$=\sum_{d|n}d\pi_p(d)$$

כעת נוכיח את המשפט באינדוקציה. נניח נכונות לכל $d<n$, ואז

$$p^{n}=\sum_{d|n}d\pi_{p}\left(d\right)=\sum_{n\neq d|n}d\left(\frac{1}{d}\sum_{k|d}\mu\left(\frac{d}{k}\right)p^{k}\right)+n\pi_{p}\left(n\right)$$

בשלב זה מספיק להראות שאם נציב את הביטוי המבוקש במקום $\pi_{p}\left(n\right)$ נקבל שוויון.

$$\begin{aligned}p^{n} & =\sum_{n\neq d|n}\sum_{k|d}\mu\left(\frac{d}{k}\right)p^{k}+\sum_{k|n}\mu\left(\frac{n}{k}\right)p^{k}=\sum_{d|n}\sum_{k|d}\mu\left(\frac{d}{k}\right)p^{k}=\sum_{k|d|n}\mu\left(\frac{d}{k}\right)p^{k}\\
 & =\sum_{k|n}\sum_{k|d|n}\mu\left(\frac{d}{k}\right)p^{k}=\sum_{k|n}p^{k}\sum_{k|d|n}\mu\left(\frac{d}{k}\right)=\sum_{k|n}p^{k}\sum_{e|\frac{n}{k}}\mu\left(e\right)=\sum_{\substack{k|n\\ \frac{n}{k}=1}}p^{k}=p^{n}\end{aligned}$$

■

הגדרה 0.3 בהינתן הרחבת שדות K/F נסמן $\mathrm{Hom}_{F}\left(K,\overline{F}\right)$ את קבוצת כל השיכונים של K לתוך $\overline{F}$ מעל F (כלומר, שמקבעים את F איבר איבר). מסמנים גם

$$\mathrm{Emb}_{F}\left(K,\overline{F}\right),\mathrm{Ism}_{F}\left(K,\overline{F}\right)$$

הגדרה 0.4 מעלת הפרידות של K מעל F היא:

$$\left[K:F\right]_{S}=\left|\mathrm{Hom}_{F}\left(K,\overline{F}\right)\right|$$

זו נקראת גם מעלת הספרביליות.

הגדרה 0.5 כרקטר של חבורה G הוא הומומורפיזם $\varphi:G\to F^{*}$, כאשר F שדה.

הערה 0.6 הכרקטרים של חבורה G נמצאים במרחב הווקטורי מעל F של פונקציות $G\to F$.

למה 0.7 כרקטרים שונים הם בלתי תלויים.

הוכחה: נוכיח בשלילה. ניקח צירוף לינארי לא טריוויאלי מינימלי של כרקטרים שמתאפס:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i}\chi_{i}=0$$

כלומר, לכל $g\in G$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i}\chi_{i}\left(g\right)=0$$

יהי $h \in G$ המקיים $\chi_1(h) \neq \chi_2(h)$, ואז נכפול פי $\chi_1(h)$ את כל המשוואה:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i(g) \chi_1(h) = 0$$

כמו כן, נציב בשוויון הקודם gh:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i(gh) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i(g) \chi_i(h)$$

נחסר בין שני השוויונות האחרונים שקיבלנו, ואז

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i (\chi_i(h) - \chi_1(h)) \chi_i(g) = 0$$

וזה צירוף לינארי לא טריוויאלי קצר יותר מהמקורי שלקחנו, בסתירה למינימליות. ■

טענה 0.8 עבור הרחבות סופיות מתקיים $[K:F]_S \leq [K:F]$.

הוכחה: יהיו $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ שיכונים של Kלתוך $\overline{F}$ מעל F, ונסמן $n = [K:F]$. נבחר בסיס $e_1, \ldots, e_n$ של K מעל F. אם כן, $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ הם כרקטרים של K^* לתוך $\overline{F}$, ולכן בלתי תלויים לינארית. לכן, הווקטורים

$$\left(\begin{pmatrix} \sigma_i(e_1) \\ \vdots \\ \sigma_i(e_n) \end{pmatrix} \right)_{i=1}^{m}$$

בלתי תלויים לינארית. נוכיח זאת: נניח כי לכל j מתקיים

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sigma_i(e_j) = 0$$

אזי ההעתקה $\sum \lambda_i \sigma_i$ היא העתקה לינארית שמתאפסת על איברי הבסיס של K/F, ועל כן היא העתקת האפס - כלומר $\lambda_i = 0$ לכל i. אם כן, המטריצה

$$(\sigma_i(e_j))_{i,j=1,1}^{m,k}$$

היא מדרגה m. כמו כן, הדרגה היא לכל היותר n, ולכן $m \leq n$, וסיימנו - הראינו שכל כמות סופית של שיכונים היא קטנה מאשר n, ולכן הכמות הכללית סופית וקטנה יותר מאשר n. ■