אלגברה ב2

ארזים ⓒ

6 ביוני 2017

1 הרחבות נעלות

נמשיך מאיפה שעצרנו.

טענה 1.1 תהי L/K הרחבת שדות, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}\subseteq L$, $\omega\in L$. אם ω תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ אבל לא תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$, אז α_1 תלוי אלגברית $\{\omega,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$.

הוכחה: יש $f\left(x_1,\ldots,x_m,y\right)\in K\left[x_1,\ldots,x_m,y\right]$ שמקיים

$$f\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,y\right)\neq0$$
$$f\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\omega\right)=0$$

נרשום

$$f\left(x_1,\ldots,x_m\right)=\sum_{i=0}^{d}a_i\left(x_2,\ldots,x_m,y\right)x_1^i$$

מתקיים $f\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,y\right)\neq0$ ולכן קיים i עבורו $a_i\left(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,y\right)\neq0$. ω בלתי תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$, ולכן בהכרח $a_i\left(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\omega\right)\neq0$ (אחרת זה היה נותן תלות אלגברית). לכן

$$f\left(x_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\omega\right)\neq0$$

וסיימנו (כי פולינום זה מתאפס כשמציבים בתור x_1 את α_1). ■

למה 1.2 תהיינה $A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\},B=\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}\subseteq L$. נניח כי A בלתי תלוייה אלגברית מעל K, אבל תלוייה באלגברית בקבוצה B. אזי $m\leq n$.

הוכחה: יהי k מספר האיברים בתוך $A\cap B$. אם $k=m$ אזי $m=k\leq n$ וסיימנו. נניח כעת כי $k<m$ ונמשיך באינדוקציה על $m-k$. נרשום $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_{k+1},\ldots,\beta_n\}$. עתה, $\alpha_{k+1}\in A$ ולכן תלוי אלגברית בקבוצה B. אבל הוא לא תלוי אלגברית בקבוצה $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ - כלומר יש $j\geq k+1$ כך שהאיבר α_{k+1} תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_{k+1},\ldots,\beta_j\}$

אבל לא תלוי בקבוצה $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_{k+1},\ldots,\beta_{j-1}\}$. לפי הטענה הקודמת נקבל כי β_j תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_{k+1},\ldots,\beta_{j-1},\alpha_{k+1}\}$. נגדיר $B'=B\setminus\{\beta_j\}\cup\{\alpha_{k+1}\}$, ואז $|B'|=n$, וכן $|A\cap B'|=k+1$. A עדיין תלוייה אלגברית מעל B'. לכן מהאינדוקציה נקבל $m\le n$. ■

מסקנה 1.3 תהי L/K הרחבת שדות. אזי לכל בסיסי הנעלות של L מעל K יש את אותה עוצמה. נסמן עוצמה זו

$$\operatorname{tr}\deg\left(L/K\right)$$

ונקרא לה מעלת הנעלות של L/K.

הוכחה: במקרה הסופי, יהיו A,B שני בסיסי נעלות שאחד מהם סופי (בלי הגבלת הכלליות A). לפי הלמה הקודמת, היות והקבוצה B אלגברית מעל $K\left(A\right)$, אז כל תת קבוצה סופית של B היא בגודל $|A|$ לכל היותר. לכן $|B|\le|A|$. מסימטריה נקבל $|A|=|B|$.

המקרה האינסופי דומה ולא נדון בו בקורס. ■

דוגמאות $\mathbb{C}\subseteq\mathbb{C}\left(x\right)$. לכל n, $x^n\in L$ הוא בסיס נעלות, אבל $\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^n)$ ממעלה n - אז המעלה של ההרחבה האלגברית שנותרת אינה קבועה.

טענה 1.4 נניח כי $L=K\left(A\right)$, כאשר $A\subseteq L$ כלשהי. אזי יש בסיס נעלות $A_0\subseteq A$.

הוכחה: נקח $A_0\subseteq A$ בלתי תלוייה אלגברית מקסימלית (מהלמה של צורן, כמו שעשינו בעבר). אז $K(A)/K(A_0)$ אלגברית (כי אחרת אפשר להרחיב את A_0) ולכן A_0 בסיס נעלות. ■

מסקנה 1.5 אם $L=K\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$, וכן $\operatorname{tr}\deg\left(L/K\right)=n$, אזי $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ הם בסיס נעלות.

הוכחה: יש תת קבוצה שהיא בסיס, וגודלה הוא n, ולכן היא שווה לכל הקבוצה. ■

2 הפולינום הגנרי

הגדרה 2.1 יהיו $A_0,\ldots A_{n-1}$ משתנים מעל K. נגדיר

$$f\left(x\right)=x^n+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_0$$

נקרא לפולינום f הפולינום הגנרי המתוקן ממעלה n.

נוסחאת שורשים גנרית היא נוסחא לפולינום הגנרי, ואז לכל פולינום עם מקדמים בתוך K נוסחאת השורשים תהיה הצבה בנוסחאת השורשים הגנרית.

משפט 2.2 יש נוסחא גנרית אם ורק אם $n\le 4$.

הוכחה: די להוכיח כי $S_n = \mathrm{Gal}\left({}^{f}/_{K(A_0,\ldots,A_{n+1})}\right)$, שכן S_1, S_2, S_3, S_4 פתירות, בעוד S_n עבור $n \geq 5$ לא פתירות.

נבחר $x_1, \ldots, x_n$ משתנים. S_n פועלת על $K(x_1, \ldots, x_n)$ על ידי

$$\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$$
$$\sigma|_K = \mathrm{Id}$$

נתבונן בשדה השבת:

$$E = K(x_1, \ldots, x_n)^{S_n}$$

ונסמן

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}$$

עם $s_0 = 0$. אז בבירור

$$s_k \in E$$

לכל k. כמובן, $\mathrm{Gal}\left({}^{K(x)}/_{E}\right) = S_n$. כמו כן,

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s_i \cdot x^i$$

לכן $K(x)$ הוא שדה הפיצול של $f(x)$ מעל $K(s_1, \ldots, s_n)$, שמוכל בתוך E. לכן

$$n! [E : K(s_1, \ldots, s_n)] = [K(x_1, \ldots, x_n) : E][E : K(s_1, \ldots, s_n)] = [K(x_1, \ldots, x_n) : K(s_1, \ldots s_n)] \leq n!$$

מכאן נקבל כמה דברים: ראשית,

$$E = K(s_1, \ldots, s_n)$$

כמו כן,

$$S_n = \mathrm{Gal}\left({}^{K(x_1,\ldots,x_n)}/_{K(s_1,\ldots,s_n)}\right)$$

■