אלגברה ב2

ארזים ©

9 במאי 2017

1 חבורות גלואה של פולינומים

אם f פולינום פריד מעל K אזי שדה הפיצול שלו N הוא הרחבת גלואה של N. מסמנים

$$\mathrm{Gal}\left(f/K\right) := \mathrm{Gal}\left(N/K\right)$$

למה 1.1 בסימונים שלעיל:

1. G פועלת נאמנה על שורשי f.
2. f אי פריק אם ורק אם הפעולה של G על שורשי f טרנזיטיבית.
3. נסמן $\{O_i\}_{i=1}^{r}$ את מסלולי פעולת G על שורשי f. אזי $f = f_1 \cdots f_r$, כאשר $f_1, \ldots, f_r \in K\left[x\right]$ אי פריקים, $\deg f_i = |O_i|$, ומתקיים

$$f_i = \prod_{\alpha \in O_i} \left(x - \alpha\right)$$

הוכחה: נכתוב

$$f\left(x\right) = \sum_{I=0}^{n} a_i x^i$$

כאשר $a_i \in K$.

1. אם α שורש של f, אז

$$0 = f\left(\alpha\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i$$

נפעיל $\sigma \in G$:

$$0 = \sigma\left(f\left(\alpha\right)\right) = \sigma\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i\right) = \sum_{I=1}^{n} \sigma\left(a_i \alpha^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sigma\left(\alpha^i\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \sigma\left(\alpha\right)^i = f\left(\sigma\left(\alpha\right)\right)$$

לכן גם $\sigma(\alpha)$ שורש. N נוצרת על ידי שורשי f, ולכן אם σ פועל טריוויאלית על השורשים, הוא פועל פריוויאלית על N ולכן $\sigma = \mathrm{Id}$.

2. נניח $f = gh$ פירוק לא טריוויאלי. f פריד, ולכן f, g לא יכולים לחלוק גורמים - כי אז היה שורש כפול עבור f. לכן $\gcd(g,h) = 1$. נקח α שורש של g. אז אם $\sigma \in G$, גם $\sigma(\alpha)$ שורש של g. לכן α לא יכול לעבור לשורש של h. לכן הפעולה לא טרנזיטיבית.
בכיוון השני, אם f אי פריק, $\alpha, \beta \in N$ שורשים של f, ראינו בעבר שיש איבר $\sigma \in G$ המקיים $\sigma(\alpha) = \beta$ (הסיבה היא שמתקיים $K(\alpha) \cong {}^{K[x]}/_{f} \cong K(\beta)$). לכן הפעולה טרנזיטיבית.

3. נפרק את f למכפלת אי פריקים:

$$f = \prod_{i=1}^{r} f_i$$

ברור שלכל $i \neq j$ מתקיים $\gcd(f_i, f_j) = 1$ כמו קודם. נסמן $N_i \subseteq N$ את שדה הפיצול של f_i, ונסמן $G_i \leq G$ חבורת גלואה המתאימה. לפי הסעיף הקודם, G_i פועלת טרנזיטיבית על שורשי f_i. מצד שני, העתקת הצמצום $r_i : G \twoheadrightarrow G_i$ היא אפימורפיזם שמכבד את הפעולה על השורשים. לכן, כיוון ששורשי f_i הם מסלול של G_i, נובע שהם גם מסלול של G.

■

1.1 הדיסקרימיננטה של פולינום

הגדרה 1.2 יהי

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

פולינום ממעלה n. יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ שורשיו:

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$$

<u>הדיסקרימיננטה</u> של f מוגדרת להיות:

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-2} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) =$$
$$= a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

למה 1.3

$$\Delta\left(f\right)=\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{n-2}\prod_{i=1}^{n}f'\left(\alpha_i\right)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}f\left(x\right)&=a_0\prod_{i=1}^{n}\left(x-\alpha_i\right)\\ f'\left(\alpha_j\right)&=a_0\cdot\prod_{i\neq j}\left(\alpha_j-\alpha_i\right)+0\\ \prod_{i=1}^{n}f'\left(\alpha_j\right)&=\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{n}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i\neq j}\left(\alpha_j-\alpha_i\right)=\\ &=a_0^{n}\prod_{i\neq j}\left(\alpha_i-\alpha_j\right)\end{aligned}$$

■

דוגמא

$$\Delta\left(x^2+ax+b\right)=\left(\alpha_1-\alpha_2\right)^2=\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2-4\alpha_1\alpha_2=a^2-4b$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(x^n-1\right)&=\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}n\left(\zeta_n^i\right)^{n-1}=\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^n\left(\prod_{i=1}^{n}\zeta_n^i\right)^{n-1}=\\ &=\left(-1\right)^{\frac{n^2-n}{2}}n^n\left(-1\right)^{n^2-1}\end{aligned}$$

משפט 1.4 תכונות של הסיקרימיננטה:

1. $f\in K\left[x\right]$ פריד אם ורק אם $\Delta\left(f\right)\neq 0$.
2. $\Delta\left(f\right)\in K$.
3. אם f פריד, $G=\mathrm{Gal}\left(f/K\right)$, $\mathrm{char}K\neq 2$, נזהה את G עם תת חבורה של S_n על ידי הפעולה על שורשי f. אזי $G\leq A_n$ אם ורק אם $\Delta\left(f\right)=x^2$ עבור $x\in K$ כלשהו.

הוכחה:

1. ברור ־ הביטוי מוגדר על ידי מכפלת הפרשי השורשים, ולכן הוא מתאפס אם ורק אם יש שני שורשים שווים.

2. אם f לא פריד, אז $\Delta\left(f\right)=0\in K$ וסיימנו. אם f פריד, אזי לכל $\sigma\in\mathrm{Gal}\left(f/K\right)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\sigma\left(\Delta\left(f\right)\right) & =\sigma\left(\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{0}^{2n-2}\prod_{i\neq j}\left(\alpha_{i}-\alpha_{j}\right)\right)=\\
 & =\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{0}^{2n-2}\prod_{i\neq j}\left(\sigma\left(\alpha_{i}\right)-\sigma\left(\alpha_{j}\right)\right)=\\
 & =\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{0}^{2n-2}\prod_{i\neq j}\left(\alpha_{i}-\alpha_{j}\right)
\end{aligned}$$

ולכן $\Delta\left(f\right)\in K$ - היא מושבתת על ידי כל איברי $\mathrm{Gal}\left(f/K\right)$.

3. נוכיח בהרצאה הבאה.

■

הערה 1.5 יש נוסחה של ממש עבור הדיסקרימיננטה לפי מקדמי הפולינום, שנראה אותה בהרצאה הבאה (נוסחת סילבסטר/נוסחת הרזולטנטה).