אלגברה ב2

ארזים ©

14 במרץ 2017

התחלנו עם חצי שעה של הקדמה על ההיסטוריה של תורת המשוואות ותורת גלואה.

1 חוגים, שדות ופולינומים

1.1 חוגים

הגדרה 1.1 חוג (עם יחידה) R הוא קבוצה עם שתי פונקציות:

$$\cdot : R \times R \to R$$
$$+ : R \times R \to R$$

שנקראות כפל וחיבור (בהתאמה), שמקיימות את התכונות הבאות:

1. $(R, +)$ חבורה אבלית. בפרט קיים 0, איבר נייטרלי לחיבור.
2. $(R, \cdot)$ מונואיד אבלי (הכפל אסוציאטיבי וקומוטטיבי). בפרט קיים 1, איבר נייטרלי לכפל.
3. חוקי הפילוג מתקיימים:

$$(a+b)\,c = ac + bc$$

בפרט, $0 \cdot a = 0$ לכל $a \in R$:

$$0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$
$$0 = 0 \cdot a$$

הערה 1.2 $1 = 0$ אם ורק אם $R = \{0\}$.

הגדרה 1.3 תת קבוצה $S \subseteq R$ של חוג נקראת תת־חוג אם S חוג ביחס לפעולות של R, וכן $1 \in S$.

טענה 1.4 יהי R חוג, ויהי $S \subseteq R$. אזי S הוא תת חוג אם ורק אם $1 \in S$, וכן S סגור לחיבור, לכפל, ולנגדי.

הוכחה: תרגיל (כמו בחבורות). ■

הגדרה 1.5 יהיו R, S חוגים. העתקה $\varphi : R \to S$ נקראת הומומורפיזם (של חוגים) אם מתקיימים התנאים הבאים:

1.

$$\forall x, y \ \ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

2.

$$\forall x, y \ \ \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

3.

$$\varphi(1_R) = 1_S$$

הערה 1.6 תנאי 3 לא נובע מתנאים 1,2. כתרגיל - לנמק.

הערה 1.7

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0) \\ 0 &= \varphi(0) \end{aligned}$$

הגדרה 1.8 הומומורפיזם חד־חד־ערכי נקרא מונומורפיזם. הומומורפיזם על נקרא אפימורפיזם. הומומורפיזם שהוא אפימורפיזם ומונומורפיזם נקרא איזומורפיזם.

הגדרה 1.9 חוג R נקרא תחום שלמות אם $1 \neq 0$ אין בו מחלקי אפס, כלומר

$$\forall a, b \in R \ \ ab = 0 \iff a = 0 \lor b = 0$$

תרגיל $R \neq 0$ תחום שלמות אם ורק אם קיים בו חוק צמצום, כלומר

$$\forall a \neq 0, b, c \ \ ab = ac \Rightarrow b = c$$

הגדרה 1.10 יהי R חוג. תת קבוצה $I \subseteq R$ נקראת <u>אידאל</u> אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. $0 \in I$.
2. $(I,+) \leq (R,+)$ - I תת חבורה של R (ביחס לחיבור).
3. I סגורה לכפל באיברי R, כלומר

$$\forall a \in R, b \in I \;\; ab \in I$$

דוגמאות $0, R$ תמיד אידאלים.