תרגול 3 - 1.11.18

הצגה דואלית.

$\pi: G \to GL(V)$ $\qquad \dim_F V = n$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל-V

$\hat{B} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ הבסיס של V^* הדואלי ל-B

ההצגה הדואלית: $\hat{\pi}: G \to GL(V^*)$

$$(\hat{\pi}(g)\varphi)(v) = \varphi(\pi(g^{-1})v)$$

נסמן $[\pi(g)]_B = (\pi_{ij}(g))_{i,j}$

נמצא את $[\hat{\pi}(g)]_{\hat{B}}$

נסמן $\hat{\pi}(g)\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\varphi_i$

נציב v_k:

$$\hat{\pi}(g)\varphi_j(v_k) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\varphi_i(v_k) = x_{kj}$$

$$\varphi_j(\pi(g^{-1})v_k) = \varphi_j\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_{ik}(g^{-1})v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \pi_{ik}(g^{-1})\varphi_j(v_i) = \pi_{jk}(g^{-1})$$

$$[\hat{\pi}(g)]_{\hat{B}} = [\pi(g)]_B^{-1}$$

נגדיר את התבנית $\langle , \rangle : V \times V^* \to F$

$$\langle v, \varphi \rangle = \varphi(v)$$

זאת תבנית בילינארית מעל F, התבנית לא מנוונת כלומר אם בהינתן $v \in V$, מתקיים $\langle v, V^* \rangle = 0$ אז $v = 0$, וכן אם בהינתן $\varphi \in V^*$ מתקיים $\langle V, \varphi \rangle = 0$ אז $\varphi = 0$. מתקיים $\langle v, \varphi \rangle = \langle \pi(g)v, \hat{\pi}(g)\varphi \rangle$

$$(\hat{\pi}(g)\varphi)(\pi(g)v) = \varphi(\underbrace{\pi(g^{-1})\pi(g)v}_{v}) = \varphi(v) = \langle v, \varphi \rangle$$

טענה: נתונות שתי הצגות π, σ של חבורה G במרחבים ממימד סופי (מעל F) V_π, V_σ. נניח כי יש תבנית בילינארית, לא מנוונת $\langle , \rangle : V_\pi \times V_\sigma \to F$, כך ש- $\langle \pi(g)v, \sigma(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$, לכל $g \in G$, $v \in V_\pi$, $w \in V_\sigma$.

אז $\hat{\sigma} \cong \pi$

נגדיר $T: V_\pi \to V_\sigma^*$ כך $[T(v)](w) = \langle v,w \rangle$ $\quad v\in V_\pi,\ w\in V_\sigma$

<u>הוכחה</u> T חח"ע, כי אם $T(v)=0$ כלומר

T מתאפס לכל $w \in W$. $\langle v,w \rangle = 0$ כיוון ש- מתקיים לכל [illegible] מנוונות $v=0$ ע"פ הגדרת ההתאמה

נסיק כי: $\dim V_\pi \le \dim V_\sigma^*$ באותו אופן

$\dim V_\sigma$ נגדיר $S: V_\sigma \to V_\pi^*$ $(S(w))(v) = \langle v,w \rangle$, נקבל נקבל

S חח"ע ולכן $\dim V_\pi$, $\dim V_\sigma \le \dim V_\pi^*$. לכן $\dim V_\pi = \dim V_\sigma$

נסיק כי T גם על כלומר T [illegible] $T \cdot \pi(g) = \hat{\sigma}(g)\cdot T$ לכל $g \in G$.

$$T(\pi(g)v)(w) = \langle \pi(g)v, w \rangle = \langle \pi(g)v, \sigma(g)(\sigma(g^{-1})w) \rangle = \langle v, \sigma(g^{-1})w \rangle = T(v)(\sigma(g^{-1})w) = [\hat{\sigma}(g)(T(v))](w)$$

$$\Rightarrow \quad T\circ \pi(g) = \hat{\sigma}(g)\circ T$$

<u>הערה.</u> באותו אופן ניתן לקבל כי ע"י S בהוכחה
$$S\cdot\sigma(g) = \hat{\pi}(g)\cdot S$$

ולכן $\sigma \cong \hat{\pi}$ ומכאן $\pi \cong \hat{\hat{\pi}}$

תהי π הצגה של אלגברה A במרחב V ממימד סופי מעל F.

נניח כי $0 \ne U \subsetneq V$ תת מרחב אינווריאנטי. נבחר בסיס ל- U $B_U = \{u_1, \dots, u_k\}$ ונשלים אותו לבסיס של V:
$$B = \{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

נתבונן בתת ההצגה π^U של A ב- U.
נכתוב $[\pi(a)|_U]_{B_U} = (x_{ij}(a))_{1\le i,j\le k}$

נתבונן בהצגת המנה $\bar{\pi}$ ב V/U $\quad \bar{B} = \{v_{k+1}+U, \dots, v_n+U\}$
זהו בסיס ל- V/U

$$[\bar{\pi}(a)]_{\bar{B}} = (y_{ij}(a)) \in M_{n-k}(F)$$
$$\bar{\pi}(a)(v_j) = \sum_{i=k+1}^{n} y_{ij}(a)(v_i + U)$$

כלומר $\pi(a)v_j - \sum_{i=k+1}^{n} y_{ij}(a)v_i \in U$ לכל $j \ge k+1$

$$[\pi(a)]_B = \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array}\overset{k}{\begin{pmatrix} x(a) & * \\ 0 & y(a) \end{pmatrix}}$$

לן

$A \to End_F(U)$

$a \to x(a)$

$A \to End_F(V/U)$

$a \to y(a)$

משפט: יהי V מודול ממימד סופי מעל האלגברה A. אז יש שרשרת של תת מודולים,

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V$$

כך שהמנות העוקבות אי פריקות, כלומר V_{i+1}/V_i מודולים אי פריקים.

הוכחה: אם V אי פריק סיימנו.

נניח כי V פריק, אז קיים $0 \neq V_1 \subsetneq V$ תת מודול ממימד חיובי מינימלי. נתבונן ב- V/V_1 כיוון ש $\dim(V/V_1) = \dim V - \dim V_1 < \dim V$ באינדוקציה, יש לו שרשרת תת מודולים

$$0 \subsetneq W_2 \subsetneq W_3 \subsetneq \dots \subsetneq W_n = V/V_1$$

תת מודולים, כך שהמנות העוקבות אי פריקות

יש תת מודולים $V_1 \subset V_{i+1} \subset V$ כך ש-

$$W_{i+1} = V_{i+1}/V_1$$

$$0 \neq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V$$

מתקיים

$$W_{j+1}/W_j = \frac{V_{j+1}/V_1}{V_j/V_1} \cong V_{j+1}/V_j$$

אי פריק

הישג למשפט, נקח בסיס של V_1, נשלים לבסיס של V_2 ואת זה לבסיס של V_3 וכן הלאה. מתקבל בסיס של V נסמן B נסמן ב-π את ההצגה של A ב-V $\pi(a)(v) = a \cdot v$ המטריצה של π לפי B נראית כך:

$$[\pi(a)]_B = \begin{pmatrix} x_1(a) & * & * & * \\ 0 & x_2(a) & & \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & 0 & & x_n(a) \end{pmatrix}$$

כאשר $x_i(a)$ היא המטריצה המייצגת של ההצגה המושרית של A ב- V_i/V_{i-1} לפי הבסיס שמתקבל — מהתמונות מודולו V_{i-1} של ההשלמה של הבסיס של V_{i-1} לבסיס V_i.

ההצגות $a \to x_i(a)$ הן הצגות אי פריקות של A סקולות

ושקולות להצגות של λ דומות ל- V_i/V_{i-1}

פריקות לחלוטין של הצגות

משפט Maschke: תהא π הצגה של חבורה סופית G במרחב V מעל שדה F. נניח $|G| \nmid char(F)$.
יהי $W\subset V$ תת מרחב אינווריאנטי ל- π. אז יש תת מרחב אינווריאנטי $W'\subset V$ כך ש- $V=W\oplus W'$.

AC <u>הוכחה:</u> נבחר תת מרחב U של V כך ש- $V=W\oplus U$.
יהי $r: V\to W$ ההטלה על W במקביל ל- U.
נגדיר
$$R=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g)\cdot r\,\pi(g^{-1})$$

1. לכל $v\in V$, $R(v)\in W$, כי $r(\pi(g^{-1})v)\in W$, ומכיוון ש- W אינווריאנטי $\pi(g)(r(\pi(g^{-1})v))\in W$

2. לכל $w\in W$, $R(w)=w$, כי $\pi(g^{-1})w\in W$ ולכן $r(\pi(g^{-1})w)=\pi(g^{-1})w$
מכאן $\pi(g)(r(\pi(g^{-1})w))=\pi(g)(\pi(g^{-1})w)=w$
$$R(w)=\frac{1}{|G|}(\underbrace{w+w+\dots+w}_{|G|})=w$$

R הטלה, כלומר $R^2=R$
כי לכל $v\in V$, $R(v)\in W$, ולכן $R(R(v))=R(v)$

3. נראה כי $R\pi(g)=\pi(g)R$ לכל $g\in G$

Pf
$$R\pi(h)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g)\,r\,\pi(g^{-1})\pi(h)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g)\,r\,\pi(g^{-1}h)$$

שינוי משתנים: $g\longrightarrow hg$
$$R\pi(h)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(hg)\,r\,\pi(g^{-1})=\pi(h)\cdot\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g)\,r\,\pi(g^{-1})=\pi(h)R$$

נגדיר $W'=\ker R$ (כיוון $W=\operatorname{Im}R$)
~~בשמש~~ ש- R הומומורפיזם של הצגות, $W'\subset V$ תת מרחב אינווריאנטי,
ומתקיים (כיוון ש- R הטלה) $V=W\oplus W'$

הגדרה וסימון: נתונות שלוש הצגות σ, τ, π. נניח כי יש פירוק $V_\pi = W \oplus W'$ כאשר W, W' מרחבים אינווריאנטים, $\sigma \cong \pi^W$, $\tau \cong \pi^{W'}$. נאמר כי π איזומורפית לסכום הישר של σ ושל τ ונסמן $\sigma \oplus \tau \cong \pi$.

בהינתן הצגות σ, τ במרחבים V_σ, V_τ של אלגברה A, $V = V_\tau \times V_\sigma$. לכל a ב-A, נגדיר $\pi(a)(u,w) = (\tau(a)u, \sigma(a)w)$

אז π הצגה של A כך, $u \in V_\tau$, $w \in V_\sigma$.

$\sigma \oplus \tau \cong \pi$

מסקנה ממשפט Maschke: תהי G חבורה סופית כך ש-$char(F) \nmid |G|$. אז כל הצגה ממימד סופי של G מתפרקת לסכום ישר של הצגות אי-פריקות.

<u>דוגמא:</u>

$$W_n = W : S_n \to GL(F^n)$$
$$W_n(\sigma)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

$U = F \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ - תת מרחב אינווריאנטי.

$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$ תת מרחב אינווריאנטי.

$F^n = U \oplus Z$ (נניח כי $char F \nmid n$)

נראה כי W_n^Z אי-פריקה.

נניח כי $0 \neq W \subset Z$ תת מרחב אינווריאנטי.

נבחר $0 \neq v_0 \in W$. כיוון ש-$v_0 \notin U$ יש ל-v_0 שתי קואורדינטות שונות. ע"י הפעלת תמורה על קואורדינטות v_0, נקבל וקטור ב-W ונביא שתי קואורדינטות אלה למקומות $1,2$. לכן אפשר להניח כי $v_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ כך ש-$a \neq b$. נפעיל את החילוף $(1,2)$

גם $\begin{pmatrix} b \\ a \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W$. נחסר ונקבל כי $W \ni \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

לכן $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ כיוון ש-W אינווריאנטי, גם הוקטורים

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ הם כולם שייכים ל-W ($\cancel{n-2}$ $n-1$)

אך זה בסיס ל-Z ולכן $W=Z$. נסמן $W_n^Z = W_n'$

הצמוד חח"ע

נשים לב כי $w_n': S_n \longrightarrow GL(Z) = GL_{n-1}(F)$

<u>n=4:</u> נחשב את המטריצות של $w_4'((1,2))$, $w_4'((1,2,3,4))$

לפי הבסיס הבא של Z: $z_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ z_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\ z_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$w_4'((1,2))z_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = -z_1$$

$$w_4'((1,2))z_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = z_1 + z_2$$

$$w_4'((1,2))z_3 = z_3$$

$$[w_4((1,2))]_B = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$w_4'((1,2,3,4))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{\sigma^{-1}(1)}\\ \vdots\\ x_{\sigma^{-1}(4)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_4\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$(1,2,3,4)^{-1} = (1,4,3,2)$$

$$w_4'(1,2,3,4)z_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = z_2$$

$$w_4'(1,2,3,4)z_2 = z_3$$

$$z_3 \to -(z_1+z_2+z_3)$$

<u>הגדרה:</u> הצגה של אלגברה A תקרא <u>פריקה לחלוטין</u> אם היא איזומורפית לסכום ישר של הצגות אי פריקות (סכום מקסימלי מני)

<u>דוגמא:</u> ההצגה הרגולרית של $M_n(F)$ פריקה לחלוטין.

מודול שמאלי $M_n(F)_{M_n}$

$$M_n(F) = \begin{pmatrix}* & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ * & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}0 & * & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & * & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & *\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & *\end{pmatrix}$$

$$\pi(A)\cdot X = A \cdot X$$

<u>טענה:</u> יהי V מודול מעל אלגברה A. נתונה קבוצה לכל היותר בת מניה של תת מודולים $\{V_i\}_{i\geq 1}$ כך שלכל $i \geq 2$, V_i מודול אי-פריק. אז יש תת קבוצה $\{V_{i_j}\}_{j\geq 1}$ כך ש-$i_1 = 1$ כך ש-$\sum_{i\geq 1} V_i = \bigoplus_{j\geq 1} V_{i_j}$

<u>הוכחה:</u> ~~נגדיר~~ (רקורסיבית, באינדוקציה) שלכל $n \geq 1$ יש תת סדרה $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ כך ש-

$$\sum_{i=1}^{i_n} V_i = \bigoplus_{j=1}^{n} V_{i_j}$$

נבחר $i_1 = 1$ $(V_1 = V_1)$

נניח באינדוקציה כי $n \geq 1$ מסוים פי מצאנו $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}$ כך ש...

לכל $k > i_n$, נתבונן בתת המרחב $U = \left(\sum_{i=1}^{i_n} V_i\right) \cap V_k$

ש- V_k אי פריק, $U_k=0$ או $U_k=V_k$. אם $U_k=V_k$,

כי לכל $k>i_n$, אז $V_k \subset \sum_{i=1}^{k} V_i = \bigoplus_{j=1}^{n} V_{i_j}$ לכל $k>i_n$

ולכן, $\sum_{i\geq 1} V_i = \sum_{i=1}^{i_n} V_i = \bigoplus_{j=1}^{n} V_{i_j}$

אחרת: יהי i_{n+1} האינדקס הראשון k כך ש- $k>i_n$ וגם $U_k \neq 0$

ואז $\sum_{i=1}^{i_{n+1}} V_i = \sum_{i=1}^{i_n} V_i + V_{i_{n+1}} = \bigoplus_{j=1}^{n} V_{i_j} + V_{i_{n+1}} = \bigoplus_{j=1}^{n+1} V_{i_j}$

סכום ישר כי $U_{i_{n+1}}=0$

<u>מסקנה:</u> יהי V מודול פריק לחלוטין מעל אלגברה A. אז כל תת מודול של V ~~הוא פריק לחלוטין~~ (יש לו משלים ישר כתת מודול).
~~וכן כל מודול מנה של V פריק לחלוטין~~

<u>הוכחה:</u> נניח כי $V=\bigoplus_{i\in I} U_i$ כאשר U_i תת מודולים אי פריקים.
יהי $0\neq W\subset V$ תת מודול.

נפעיל את הטענה הקודמת לקבוצה $\{W, U_1, U_2, \ldots\}$
כמובן $V=W+\sum_{i\in I} U_i$ מהטענה, יש תת קבוצה $\{U_{i_j}\}_{j\in J}$ של $\{U_i\}_{i\in I}$
כך ש- $V = W+\sum_{i\in I} U_i = W\oplus\left(\bigoplus_{j\in J} U_{i_j}\right)$

<u>טענה:</u> יהי V מודול מעל האלגברה A. נתונים שני פירוקים לסכומים ישרים של תת מודולים $V=U\oplus W=U\oplus Z$
אז $W\cong Z$ כמודולים מעל A.