שיעור 1

פרק א' - אלגבראות מודולים

הגדרות

הגדרה: אלגברה A מעל שדה F היא חוג* שהוא גם מרחב וקטורי מעל F כך שמתקיים $(\lambda\cdot a)\cdot b = \lambda\cdot(a\cdot b) = a\cdot(\lambda\cdot b)$
לכל $\lambda\in F$ ולכל $a,b\in A$. (אותו חיבור לחוג ולמ"ו)

דוגמאות:

1. תהי G חבורה (סימון כפלי) ויהי F שדה. נגדיר את אלגברת החבורה $F[G]$ כקבוצה של כל הסכומים הסופיים הפורמליים הבאים: $\sum_{g\in G} x_g\cdot g,\ x_g\in F$

- אפשר לחשוב על סכום פורמלי כזה, כעל פונקציה $x: G\to F$
שמקבלת מס' סופי של ערכים שונים מ-0. $x(g)=x_g$

חיבור לפי רכיבים (= חיבור נקודתי של פונקציות)
כפל בסקלר - נכפיל לפי פתיחת סוגריים $\lambda\cdot x(g)=\lambda x_g$

הגדרת הכפל: $(\sum_{g\in G} x_g\cdot g)(\sum_{h\in G} y_h\cdot h) =$

$$= \sum_{g,h\in G} x_g y_h\cdot(g\cdot h) = \sum_{r\in G}\Big(\sum_{\substack{g,h\in G\\ gh=r}} x_g y_h\Big)\cdot r$$

המקדם של r הינו $\sum_{h\in G} x_{rh^{-1}}\cdot y_h =$

$$\sum_{h\in G} x(rh^{-1})y(h) = (x*y)(r)$$

2. יהי V מרחב וקטורי מעל F. אז $End_F V$ אלגברה מעל F ביחס לחיבור העתקות לינאריות והכפל הוא הרכבה. אם V ממימד סופי n, נזהה V עם F^n לאחר קביעת בסיס B של V, אז $End_F V\cong M_n(F)$, $T\to[T]_B$

* לא בהכרח קיים יחידה.

הגדרה: תהי A אלגברה מעל F. תת מ"ו $I \subset A$ יקרא אידיאל שמאלי (ימני) אם I סגור ביחס לכפל משמאל (מימין) ע"י כל איברי A: $A \cdot I \subset I$.

אם $I \subset A$ הוא אידיאל שמאלי וגם ימני, נאמר כי I אידיאל (דו-צדדי) של A.

כאשר $I \subset A$ אידיאל, יש לנו את אלגברת המנה A/I

הגדרה: תהיינה A, B אלגברות מעל F. $\varphi: A \to B$ תיקרא הומומ' (של אלגברות מעל F) אם φ העתקה לינארית ו- φ הומומ' של חוגים.

$$A/I = \{a+I \mid a \in A\} \quad , (a+I)(b+I) = ab+I$$
$$\lambda \cdot (a+I) = \lambda a + I$$

קיימים משפטי הומומורפיזם כרגיל. למשל $A/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$

$$a + \ker\varphi \longmapsto \varphi(a)$$

$$\left(A/I\right)/\left(J/I\right) \cong A/J \qquad \underbrace{I \subset J}_{\text{אידיאלים}} \subset A$$

הגדרה: תהי A אלגברה מעל שדה F. יהי M מרחב וקטורי מעל F. נאמר כי M מודול (שמאלי) מעל A אם יש פעולת כפל של איברי A (משמאל) באיברי M:

$$a \cdot v \in M \quad (a \in A, v \in M)$$

כך ש- $a, a_1, a_2 \in A$; $v, v_1, v_2 \in M$

$$(a_1 + a_2)v = a_1 \cdot v + a_2 \cdot v$$
$$a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_2 + a \cdot v_2$$
$$(a_1 \cdot a_2) \cdot v = a_1 (a_2 \cdot v)$$
$$\lambda (a \cdot v) = (\lambda a) \cdot v = (\lambda \cdot v)$$

$U \subset M$ $(\neq \emptyset)$ נקרא תת מודול אם U מודול ביחס לפעולות הנ"ל.
אז יש לנו גם מודול מנה $M/U = \{v + U \mid v \in M\}$

$$a \cdot (v + U) = a \cdot v + U$$

הומומ' של מודולים (מעל A): $\varphi: M_1 \to M_2$ אמ"מ φ העתקה לינארית מעל F ו- $\forall a \in A, v \in M$ $\varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v)$.

M מודול מימין מעל A אם יש פעולת כפל מימין

$$M\times A\to M$$
$$(v,a)\to v\cdot a$$

לדוגמא: $(v\cdot a_1)a_2=v(a_1a_2)$

דוגמאות: נתונה אלגברה A מעל F. אז A מודול שמאלי מעל A וגם מודול ימני מעל A (כימום, כפל ב-A).

כיוון, $U\subset A$ תת מודול של A פירושו ש-U אידיאל שמאלי.

אם $I\subset A$ אידיאל שמאלי, אז I הוא תת מודול של A כמודול שמאלי מעל A. לכן יש משמעות ל-A/I כמו מודול מנה שמאלי מעל A.

יהי M מודול מעל A. $B=\text{End}_A M=\{\varphi:M\to M \mid$ φ העתקות של מודולים $\}$ (תכונות מעל A) בלי אלגברה מעל F כימום לחיבור העתקות לינאריות והרכבה.

- אז M מודול גם מעל B. $\varphi\cdot v=\varphi(v)$

$$\varphi\cdot(v_1+v_2)=\varphi(v_1+v_2)=\varphi(v_1)+\varphi(v_2)=\varphi\cdot v_1+\varphi\cdot v_2$$
$$(\varphi_1+\varphi_2)\cdot v=\varphi_1(v)+\varphi_2(v)=\varphi_1\cdot v+\varphi_2 v$$

$A=F$, $M=V$ - מרחב וקטורי מעל F.

אז V מודול מעל A. $B=\text{End}_F V$ - אלגברה

למשל, נקח $V=F^n$ (כמודולים), $A=M_n(F)$ עם הפעולה $X\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ כאשר $X\in M_n(F)$

טענה: בדוגמא האחרונה, ל-V אין תת-מודולים לא טריוויאליים מעל A.

הוכחה: נניח כי $0\neq U$ תת-מודול לא טריוויאלי. לכן אומר שבכל העתקה לינארית $T:V\to V$, $T(u)\subset U$.

אם $U\subsetneq V$, נבחר וקטור $v_0\in V\setminus U$ ונבחר גם $0\neq u_0\in U$. יש העתקה לינארית ש-$T(u_0)=v_0$. ואז $[T]_{B_{v_0}}^{B_{u_0}}\cdot u_0\notin U$

לכן $U=V$.

הגדרה: מודול M מעל אלגברה A, נאמר כי M מודול פריק מעל A אם אין ל-M תת מודולים לא טריוויאליים.

טענה: יהי M מודול אי פריק מעל האלגברה A. אז יש אידיאל מקסימלי שמאלי $I\subset A$ כך ש- $M\cong A/I$ כמודולים מעל A.

הוכחה: נבחר $u_0\in M$ כך ש- $Au_0\neq 0$

$$Au_0=\{a\cdot u_0 \mid a\in A\}$$

הוא תת מודול $\neq 0$ של M כיוון ש-M אי פריק $M=A\cdot u_0$.
$f:A\to M$ $f(a)=a\cdot u_0$. אז f שומרת על חיבור

$$f(r\cdot a)=(r\cdot a)\cdot u_0=r\cdot(a\cdot u_0)=r\cdot f(a)$$

כלומר f הומומורפיזם של מודולים מעל A.
המאפס של u_0 $I=\operatorname{Ker} f=\{a\in A \mid a\cdot u_0=0\}$
הינו אידיאל שמאלי. לכן $M\cong A/I$ כמודולים מעל A. $\bar{f}(a+I)=f(a)$
לכן A/I מודול אי פריק (כשמאלי) מעל A.
תת מודול של A/I הוא מהצורה J/I כאשר $I\subseteq J\subseteq A$ אידיאל שמאלי. לכן אין אידיאלים שמאליים בין I לבין A פרט ל-I עצמו ול-A. I אידיאל שמאלי מקסימלי.

משפט: יהי $J\subset M_n(F)$ אידיאל שמאלי. אז קיימת $b_0\in M_n(F)$ הפיכה ומספר $0\le k\le n$ כך ש-

$$J=\begin{pmatrix} \underbrace{0 & \cdots & 0}_{n-k} & \underbrace{* & *}_{k} \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix} b_0$$

הוכחה: ל- $\alpha\in J$ נסמן ב- $V_\alpha\subset F_n$ את מרחב השורות של α.
נגדיר $U=\sum_{\alpha\in J} V_\alpha\subset F_n$ נניח כי $U=F_n$. נסמן ב- $\{e_i\}_{i=1}^n$ את הבסיס הסטנדרטי של F_n. נכתוב

$$e_i=\sum_{j=1} V(\alpha^{i,j})$$

כאשר $\alpha^{i,j}\in J$, $V(\alpha^{i,j})\in V_{\alpha^{i,j}}$ לכל $a^{i,j}$ לכל i,
יש מטריצה $A^{i,j}\in M_n(F)$ כך שהווקטור $V(\alpha^{i,j})$ נמצא בשורה ה-i של המטריצה $A^{i,j}\cdot\alpha^{i,j}$.

נכפיל משמאל במטריצה אלמנטרית $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ i

אפשר להניח $A^{i,j}\alpha^{i,j} = \begin{pmatrix} - & 0 & - \\ & \vdots & \\ - & e_{i,j} & - \\ & \vdots & \\ - & 0 & - \end{pmatrix} = Q$

ולכן $Q \in J$

מכאן $\sum_{j=1}^{n} A^{i,j}\alpha^{i,j} = \begin{pmatrix} - & 0 & - \\ & \vdots & \\ - & e_i & - \\ & \vdots & \\ - & 0 & - \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \to & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{e_{i,i}} \in J$

$I_n = \sum_{i=1}^{n} e_{i,i} \in J$

נסיק כי $X = X \cdot I_n \in J$ לכל $X \in M_n(F)$ ולכן $J = M_n(F)$ (עבור $k=n$)

נניח כי $U \subsetneq F_n$ $\{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס k ל-U.

כמו קודם, נכתוב $u_i = \sum_{j=1}^{N_i} v(\alpha^{i,j})$

כאשר $\alpha^{i,j} \in J$, $v(\alpha^{i,j}) \in V_{\alpha^{i,j}}$

בדיוק כמו קודם, נקבל

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ -0- \\ -0- \\ -0- \end{pmatrix} \in J$$

נראה כי $J = M_n(F) \cdot \alpha_0$

ההכלה $\supseteq$ ברורה כי $\alpha_0 \in J$ ו- J אידיאל שמאלי.

ההכלה $\subseteq$: תהי $X \in J$. נסמן את שורות X ב- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$X = \begin{pmatrix} - & \alpha_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \alpha_n & - \end{pmatrix}$ כיוון ש- $\alpha_t \in U$ לכל $1 \le t \le n$

אפשר לכתוב $\alpha_t = \sum_{j=1}^{k} x_{t,j} u_j$ $(x_{t,j} \in F)$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - u_1 - \\ \vdots \\ - u_k - \\ - 0 - \\ \vdots \\ - 0 - \end{pmatrix} \in M_n(F) \cdot \alpha_0$$

α_0 מדרגה k.

לכן יש מטריצות הפיכות a_0, b_0 כך ש- $\alpha_0 = a_0 \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} b_0$

$$J = M_n(F)\alpha_0 = M_n(F)a_0 \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_k \end{pmatrix} b_0 = M_n(F) \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_k \end{pmatrix} b_0 = \begin{pmatrix} 0 & \Big| M_{n\times k}(F) \end{pmatrix} \cdot b_0$$

מסקנה: האידיאלים השמאליים המקסימליים של האלגברה $M_n(F)$ הם מטריצות $\begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & M_{n\times(n-1)}(F) \\ 0 & \end{pmatrix}$ כפול b_0 כך ש- $b_0 \in GL_n(F)$

תיאור המודולים האי פריקים מעל האלגברה $M_n(F)$

יהי M מודול אי פריק כזה. ראינו ש- יש אידיאל שמאלי.

מקסימלי: $J \subset M_n(F)$ כך ש- $M \cong A/J$ $M_n(F)$ (כמודול מעל האלגברה)

נכתוב את J כמו במסקנה. נגדיר $\varphi: M_n(F) \to F^n$

$$\varphi(x) = x b_0^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

הומומו' של מודולים מעל $M_n(F)$

לכן $M_n(F)/\ker\varphi \cong F^n$

$$\ker\varphi = \{M_n(F) \ni x \mid x \cdot b_0^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{x \in M_n(F) \mid \underbrace{x b_0^{-1}}_{\begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}\}$$

$$\left(\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \middle| * \right) b_0 = J$$

הערה: נתבונן באלגברה המטריצות $M_n(F)$ כמודול שמאלי מעל עצמה. תת המודולים האי-פריקים של $M_n(F)$ הם האידיאלים השמאליים המינימליים. אידיאל שמאלי מינימלי כפה נראה, כך ש $b_0 \in GL_n(F)$:

$$J = \left(\begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right) \cdot b_0$$

הגדרה: תהי A אלגברה מעל F. הצגה של A במרחב וקטורי V מעל F היא $\pi: A \to End_F V$ הומומו' של אלגבראות.

שבוע 2 - שיעור 2

אם $\dim_F V = n$ נבחר בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ל-V.

נסמן $a \in A$, $x(a) = [\pi(a)] \in M_n(F)$

לכן $x: A \to M_n(F)$ הומומו' של אלגבראות - x נקרא הצגה של A ב-F^n. אם $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ בסיס אחר של V

1. $y(a) = [\pi(a)]_{B'}$ אז $P = [id_V]_{B'}^{B}$, $y(a) = P x(a) P^{-1}$

לכל $a \in A$, $y(a)P = P x(a)$ לכל $a \in A$

הגדרה: נתונות שתי הצגות של A במרחבים V_π, V_σ נאמר כי ההצגות שקולות אם יש העתקה לינארית הפיכה $T: V_\pi \to V_\sigma$ כך ש $T \circ \pi(a) = \sigma(a) \circ T$

~~כך ש σ ... $f \cdot \pi$~~

באופן כללי, הוא העתקה לינארית, כך ש- $f\cdot\pi(a)=\sigma(a)\cdot f$ לכל $a\in A$

נסמן את קבוצת ההומומו' הנ"ל $\mathrm{Hom}_A(V_\pi,V_\sigma)$

אם $\pi\cong\pi'$ ו- $\sigma\cong\sigma'$ אז $\mathrm{Hom}_A(V_\pi,V_\sigma)\cong\mathrm{Hom}_A(V_{\pi'},V_{\sigma'})$

כי נבחר שקילות $\alpha: V_\pi\xrightarrow{\sim}V_{\pi'}$, $\beta: V_\sigma\to V_{\sigma'}$

ונגדיר $\mathrm{Hom}_A(V_\pi,V_\sigma)\to\mathrm{Hom}_A(V_{\pi'},V_{\sigma'})$

$$T\longrightarrow\beta\circ T\circ\alpha^{-1}$$

נסמן לפעמים, בפשטות, $\mathrm{Hom}_A(\pi,\sigma)$

תהי π הצגה של A במרחב V (מעל F).
אז V מודול מעל A לפי $a\cdot v=\pi(a)(v)$

למשל: $(ab)v=\pi(ab)(v)=(\pi(a)\circ\pi(b))(v)=$

$=\pi(a)(\pi(b)(v))$

$$\lambda(a\cdot v)=\lambda\pi(a)(v)=\pi(a)(\lambda\cdot v)=a\cdot(\lambda\cdot v)$$

$$\pi(\lambda\cdot a)v=(\lambda\cdot a)v$$

$$a\cdot(v_1+v_2)=\pi(a)(v_1+v_2)=\pi(a)v_1+\pi(a)v_2=av_1+av_2$$

להפך, אם V מודול מעל A, אז מוגדרת ההצגה של A ב-V
$\pi(a)(v)=a\cdot v$

אם U,V מודולים מעל A וההצגות המתאימות $\pi_{(V)},\sigma_{(U)}$
ויהי $f:V\to U$ הומומו' של מודולים מעל A

$$\sigma(a)f(v)=f(\pi(a)(v))=f(a\cdot v)=a\cdot f(v)$$

$$f\circ\pi(a)=\sigma(a)\circ f$$

תת-מודול $U\subset V_\pi$ בלשון ההצגות הוא תת מרחב שמור אינווריאנטי
לכל האופרטורים $\pi(a)$ $\pi(a)(U)\subset U$ לכל $a\in A$.

אם V_π מודול אי פריק, נאמר כי π הצגה אי פריקה.
אם $U\subset V_\pi$ תת מודול (תת מרחב אינווריאנטי)
בנוני את מודול המנה ~~[illegible]~~ מעל A, מוגדרת
V_π/U

~~המנה~~ הצגה π^U של A במרחב U: $\pi^U(a)=\pi(a)|_U$

אומרים כי π^U היא תת הצגה של π

הצגת המנה $\bar{\pi}$ של A במרחב המנה V_π/U

מוגדרת $\bar{\pi}(a)(v+U)=\pi(a)(v)+U$

ההומו' הטבעי $\mu: V_\pi \to V_\pi/U$ היא אופ' ב $\mathrm{Hom}_A(V_\pi, V_{\bar{\pi}})$

$$\mu(\pi(a)v)=\pi(a)v+U=\bar{\pi}(a)(v+U)=\bar{\pi}(a)\mu(v)$$

$$\mu\circ\pi(a)=\bar{\pi}(a)\circ\mu$$

נניח כי A אלג' איבר יחידה (1) ותהי A^* של האיברים ההפיכים של A. נתונה הצגה π של V. $\pi|_{A^*}: A^*\to GL(V)$ הומומ' של חבורות וכן לכל (תת) $G\subset A^*$ $\pi|_G: G\to GL(V)$

הגדרה: תהי G חבורה. הצגה של G במרחב V מעל שדה F היא הומומ' של חבורות $\pi: G\to GL(V)$

דוגמא: תהי G חבורה (סופית) ו- $A=F(G)$. כמובן, $G\subset F(G)^*$. תהי π הצגה של A ב- V. נקבל $\pi_G=\pi|_G: G\to GL(V)$ את הצגה של החבורה G. היא קובעת את π כי

$$\pi\left(\sum_{g\in G} f(g)g\right)=\sum_{g\in G} f(g)\pi_G(g)$$

להפך, תהי π הצגה של G $\pi: G\to GL(V)$ אז לפי π יש הרחבה יחידה להצגה π_A של $F(G)$. לפי:

$$\pi_A\left(\sum_{g\in G} f(g)g\right)=\sum_{g\in G} f(g)\pi(g)$$

כמובן $(\pi_A)_G=\pi$

טענה יש התאמה חח"ע בין ההצגות של G וההצגות של אלגברת החבורה $F[G]$

$\pi \longmapsto \pi_A$

$\pi \longmapsto \pi_G$,

תהי π הצגה של חבורה G במרחב V.
תת מרחב $U\subset V$ הוא תת מרחב אינווריאנטי של π אם $\pi(g)U\subset U$ לכל $g\in G$

הצגת המנה של G ב- V/U

$$\bar{\pi}(g)(v+U)=\pi(g)v+U$$

הומומ' של הצגות π,σ של G במרחבים V_π, V_σ הוא העתקה לינארית $f: V_\pi\to V_\sigma$ כך ש- $f\circ\pi(g)=\sigma(g)\circ f$ לכל $g\in G$
מסמנים $Hom_G(V_\pi,V_\sigma)$ את מרחב כל ההומומ' האלה.

בלשון הצגות של אלגברת החבורה, $F(G)$. המושגים הם כדין
המושגים הקודמים להצגות המתאימות של האלגברה $F(G)$
למשל $Hom_G(V_\pi,V_\sigma)=Hom_{F[G]}(V_\pi,V_\sigma)$ וכו'

דוגמאות להצגות של חבורות

1) $G=F^\times$, $\pi(t)=t^n$ (n טבעי נתון)
$(V=F)$

2) $G=F$ $\pi(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$(V=F^2)$

3) $G=\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n טבעי) $\pi(r+n\mathbb{Z})=e^{\frac{2\pi i r}{n}}$
$(V=\mathbb{C}=F)$

4) תהי G חבורה. נניח כי G פועלת מימין על קבוצה X.
נגדיר $V=\{f: X\to F\}$ (חיבור נקודתי וכפל בסקלר)
נגדיר $(\pi(g)f)(x)=f(x\cdot g)$

$$(\pi(g_1g_2)f)(x)=f(x\cdot(g_1g_2))=f((x\cdot g_1)\cdot g_2)=(\pi(g_2)f)(x\cdot g_1)=$$
$$=[\pi(g_1)(\pi(g_2)f)](x)$$

$$\pi(g_1g_2)=\pi(g_1)\pi(g_2)$$

גרסה שמאלית: נניח כי G פועלת משמאל על קבוצה Y.
נגדיר $W=\{f: Y\to F\}$ וכו'.

<u>מקרה פרטי:</u> $X=G$ עם פעולת הכפל (מימין) של החבורה בעצמה.
$V=\{f: G\to F\}$

$$\rho(g)f(h)=f(hg) \quad g,h\in G,\ f\in V$$
$$\lambda(g)f(h)=f(g^{-1}h)$$

ρ נקראת ההצגה הרגולרית הימנית של G
λ " " השמאלית "

$$\rho(g)\Big(\sum_{h\in G} f(h)h\Big)=\sum_{h\in G} f(hg)h \overset{h\to hg^{-1}}{=} \sum_{h\in G} f(h)hg^{-1}=$$
$$=\Big(\sum_{h\in G} f(h)h\Big)\cdot g^{-1}$$
לכן לכל $a\in F[G]$
$$\rho(g)(a)=a\cdot g^{-1}$$
באופן דומה, $\lambda(g)(a)=g\cdot a$ ← לאלגברה A מגדירים את ההצגה הרגולרית במרחב A: $\lambda(b)(a)=b\cdot a$
בלשון מודולים: מסתכלים על A כמודול שמאלי מעל A.

<u>טענה:</u> לחבורה G ההצגות הרגולריות הימנית והשמאלית שקולות. מרחב ההצגה הוא $V=\{f: G\to F\}$
<u>הוכחה:</u> נגדיר
$$T: V\to V$$
$$T(f)(x)=f(x^{-1}) \qquad (T \text{ הפיכה}, T^{-1}=T)$$
$$T\circ\rho(g)(f)(x)=$$
$$=T[\rho(g)f](x)=(\rho(g)f)(x^{-1})=f(x^{-1}g)=f((g^{-1}x)^{-1})=$$
$$=[T(f)](g^{-1}x)=\lambda(g)(T(f))(x)$$
$$\forall g\in G:\ T\circ\rho(g)=\lambda(g)\circ T$$

נניח כי $G=\{g_1,\dots,g_n\}$ חבורה עם n איברים.
נתבונן ב-$\rho(g_j)$. הבסיס הסטנדרטי של V הוא: $B=\{\delta_{g_j} \mid 1\le j\le n\}$
כאשר
$$\delta_{g_i}(g)=\begin{cases}1 & g=g_i\\ 0 & g\ne g_i\end{cases}$$

$\rho(g_j)\delta_{g_i} = \delta_{g_i g_j^{-1}}$

נסמן ב- σ_j את התמורה מ- S_n כך ש

$g_1 g_j^{-1}, \dots, g_n g_j^{-1} = g_{\sigma_j(1)}, \dots, g_{\sigma_j(n)}$

ולכן $\rho(g_j) = \delta_{g_{\sigma_j(i)}}$

$$[\rho(g_j)]_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma_j(1)} & \cdots & e_{\sigma_j(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

זהו שיכון

$G \hookrightarrow S_n \hookrightarrow GL(n)$

$g_j \to \cancel{[\rho(g_j)]_B}\ \sigma_j$

5. $G = GL_n(F)$ $\quad V = F^n$

$\pi(g)(v) = g \cdot v$

$\pi(g) = g$

* $G = M_n(F)$, π הינו צמצום של הפעלה $M_n(F)$ במרחב המודול F^n (נמשיך לסמן ב- π)

$\pi(a)(v) = a \cdot v$. ראינו כי π פשוטה אי פריקה של $M_n(F)$

עובדה: π אי פריקה גם כהצגה של $GL_n(F)$

6. יהי k : $V = \{ f(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n] \}$ פולינומים הומוגניים ממעלה k

$\pi_k : GL_n(F) \to GL(V)$

$\pi_k(g) f(x_1, \dots, x_n) = f((x_1, \dots, x_n) \cdot g)$

דוגמה: $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi = x^3 + y^3 - 5x^2y + 7xy^2$

$\pi_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \varphi(x,y) = \varphi\left((x,y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) =$

$\varphi(x+y, x-y) = \dots$

7. $G = S_n$, $V = F^n$

נסמן ב- $e_1, \dots, e_n$ את וקטורי הבסיס הקנוני (Can)

לכל $\sigma \in S_n$, נגדיר $w(\sigma) \in GL(V)$

$w(\sigma) e_i = e_{\sigma(i)}$

$$w(\sigma) = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$w(\sigma\tau)e_i = e_{\sigma\tau(i)} =$$

$$= w(\sigma)(w(\tau)e_i) = w(\sigma\tau) = w(\sigma)w(\tau)$$

$$w: S_n \xrightarrow{\text{הומו}} GL_n(F)$$

$$w(\sigma)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = w(\sigma)\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i w(\sigma)e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i)} e_i = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

מקרה פרטי: (של הדוגמא הדוגמא (4)) כאשר S_n פועלת משמאל על הקבוצה $X = \{1, 2, \ldots, n\}$
נחשוב על $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ כעל פונקציה $f: [n] \to F$
$f(i) = x_i$ $(w(\sigma)f)(i) = f(\sigma^{-1}(i))$

8: הצגה מושרית induced representation
נתונה חבורה G ותת חבורה $H < G$
נתונה הצגה τ של H במרחב U נבנה
ממנה הצגה של G
$V = \{f: G \to U \mid f(hg) = \tau(h)(f(g))\}$ חבור נקודתי וכפל בסקלר
לכל $g \in G, h \in H$
נגדיר $f \in V$, $g \in G$
$(\pi(g)f)x = f(xg)$
$(\pi(g)f)(h \cdot x) = f(hxg) = \tau(h)(f(xg)) = \tau(h)((\pi(g)f)(x))$

גרסה "שמאלית"
$W = \{f: G \to U \mid f(gh) = \tau(h^{-1})(f(g))\}$ $h \in H$, $g \in G$
נגדיר $(\sigma(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$

מקרה פרטי: $H = \{1\}$ מתקבלת ההצגה הרגולרית —
המוגדרת השמאלית $\rho = \mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G} 1$
מתקבל $\dim \mathbb{C}$ ...

$$f_{i,j}(g) = \begin{cases} \tau(h)(u_j) & g = hw_i \\ 0 & g \neq hw_i \end{cases}$$

נבדוק כי $f_{i,j} \in V$ בת"ל ופורשים ולכן זהו בסיס ל-V.

מס' איברים $= [G:H]\cdot \dim I = k\cdot r$

<u>הצגה דואלית</u>

תהי π הצגה של חבורה G במרחב V. יהי V^* המרחב הדואלי. נגדיר ל- $g\in G$, $\varphi \in V^*$. $\pi^*(g)\varphi \in V^*$