הצגות של חבורות סופיות

ארזים ©

29 בדצמבר 2016

משפט 0.1 (פרובניוס) תהי G חבורה סופית, $H \leq G$ כך שלכל $t \in G \backslash H$ מתקיים

$$H \cap tHt^{-1} = \{1\}$$

אזי

$$N = \left(G \backslash \bigcup_{g \in G} \left(gHg^{-1} \right) \right) \cup \{1\}$$

אזי $N \lhd G$.

הוכחה: נרצה להראות כי עבור ההצגה הרגולרית ρ של H, ניתן להמשיך (במובן המתאים) את ρ לכל G, כך שעבור ההצגה החדשה, הגרעין הוא בדיוק N.

עבור כל פונקציית מחלקה f על H נוכל להגדיר $\overline{f}$ פונקציית מחלקה יחידה על G המרחיבה את f ומקיימת שלכל $x \in N$ מתקיים

$$\overline{f}(x) = f(1)$$

נרצה להראות שמתקיים

$$\overline{f} = \mathrm{Ind}_H^G f - f(1) \cdot \left(\mathrm{Ind}_H^G (1) - 1 \right)$$

נוכל לכתוב לכל $h \in H$

$$\left(\mathrm{Ind}_H^G f \right)(s) = \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G} f\left(t^{-1} s t \right)$$

$$\overline{f}(h) = f(h) = \mathrm{Ind}_H^G f(h) - f(1) \left(\mathrm{Ind}_H^G (1)(h) - 1 \right)$$

נרצה לבדוק מתי h מייצב קוסט:

$$h\lambda H = \lambda H \iff \lambda^{-1} h \lambda \in H \iff \lambda \in H$$

לכן $\operatorname{Ind}_H^G(1)$, כמות נקודות השבת, תהיה 1, ולכן הגורם הימני יתאפס ונקבל את השוויון שרצינו עבור איברי H. כעת, לכל $n \in N$ הגדרנו

$$\overline{f}(n) = 1$$

נבדוק:

$$\left(\operatorname{Ind}_H^G f\right)(n) - f(1)\left(\operatorname{Ind}_H^G(1)(h) - 1\right) = f(1)$$

ולכן קיבלנו את השוויון כמו שרצינו.
נטען מעט על הגדלים של דברים:

$$\left|\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \cup \{1\}\right| = 1 + [G:H](|H|-1) = 1 + |G| - [G:H]$$

$$\left|G \backslash \left(\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \cup \{1\}\right) \cup \{1\}\right| = [G:H]$$

כעת, נחשב וניווכח כי

$$\langle f_1, f_2 \rangle_H = \left\langle \overline{f_1}, \overline{f_2} \right\rangle_G$$

מתקיים

$$\langle f_1, f_2 \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} f_1(h) \overline{f_2(h)}$$

$$\left\langle \overline{f_1}, \overline{f_2} \right\rangle_G = \frac{1}{|G|} \left(\sum_{n \in N} \overline{f_1}(n) \overline{\overline{f_2}(n)} + \sum_{1 \neq h \in H} \sum_{t \in G/H} \overline{f_1}\left(tht^{-1}\right) \overline{\overline{f_2}\left(tht^{-1}\right)} \right) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \left(\frac{|G|}{|H|} f_1(1) \overline{f_2(1)} + \sum_{1 \neq h \in H} \frac{|G|}{|H|} f_1(h) \overline{f_2(h)} \right) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} f_1(h) \overline{f_2(h)}$$

אם f פונקציית מחלקה שמתמאימה להצגה אי פריקה של H,

$$\overline{f} = \sum_{\chi} \alpha_\chi \cdot \chi$$

כאשר α_χ כולם שלמים, בגלל הנוסחה שראינו קודם. כעת,

$$\sum \alpha_\chi^2 = \left\langle \overline{f}, \overline{f} \right\rangle_G = \langle f, f \rangle = 1$$

מכאן קיים χ אי פריק יחיד עבורו $\alpha_{\chi}=\pm 1$. הוא לא -1, שכן $\overline{f}(1)=f(1)>0$, ולכן $\overline{f}$ היא כרקטר אי פריק של G.

לכן כרקטר של כל הצגה מורחב לכרקטר של הצגה כלשהי. כעת,

$$\overline{f}(n)=f(1)$$

לכל $n\in N$. בצד שמאל מדובר בעקבה של אופרטור ממימד סופי, ולכן זהו סכום של שורשי יחידה - והוא שווה למימד אם ורק אם כל שורשי היחידה הם 1. לכן $N\subseteq\ker\overline{\rho}$ עבור ההצגה ρ שמתאימה לפונקציה f.

נוכל בפרט להרים את ההצגה הרגולרית $\rho:H\to GL(V)$, שהיא נאמנה. כל מה שמחוץ לקבוצה N יפעל לא טריוויאלית, כי הוא צמוד אל H, ולכן פועל נאמנה. לכן $\ker\overline{\rho}=N$, וקיבלנו שאכן N תת חבורה נורמלית של G. ■