הצגות של חבורות סופיות

ארזים ©

22 בדצמבר 2016

1 אלגברת החבורה

הגדרה 1.1 יהי K חוג קומוטטיבי, G חבורה סופית. נוכל להגדיר את $K\left[G\right]$ ־ אלגברת החבורה.

נתבונן במקרה הפרטי בו K שדה (שנסמנו $\mathbb{K}$) ממציין אפס. במקרה זה $\mathbb{K}\left[G\right]$ פשוטה למחצה ־ כלומר ניתן לזהות אותה עם מכפלה סופית כלשהי של חוגי מטריצות מעל חוגי חילוק כלשהם (חוגים לאו דווקא קומוטטיביים שיש בהם חילוק).

אנחנו נתעסק במקרה $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. כאן נקבל

$$\mathbb{C}\left[G\right]\cong\prod_{i=1}^{h}M_{n_i}\left(\mathbb{C}\right)$$

יהיו $\left(\rho_i,W_i\right)_{i=1}^{h}$ ההצגות האי פריקות השונות של G. נוכל להרחיב

$$\tilde{\rho}_i:\mathbb{C}\left[G\right]\to\mathrm{End}\left(W_i\right)$$

וכמו כן, $\tilde{\rho}_i$ היא על. כמו כן, נוכל להגדיר

$$\tilde{\rho}=\left(\tilde{\rho}_i\right)_{i=1}^{h}$$

וקל לראות שזה חד־חד־ערכי ועל. בכיוון ההפוך,

$$\left\{u_i\right\}_{i=1}^{n}\in\prod_{i=1}^{h}\mathrm{End}\left(W_i\right)\to u=\sum_{s\in G}u\left(s\right)s$$
$$u\left(s\right)=\frac{1}{\left|G\right|}\sum_{i=1}^{h}n_i\mathrm{Tr}\left(\rho_i\left(s^{-1}\right)u_i\right)$$

משפט 1.2 תהי G חבורה אבלית סופית, ויהי $u\in\mathbb{Z}\left[G\right]$ איבר מסדר סופי. אזי $u\in\pm G$.

הוכחה: $u\cdot u'=1$. צריך להוכיח

$$\sum_{s\in G}\left|u\left(s\right)\right|^2=1$$

כמובן $\left|u\left(s\right)\right|^2=u\left(s\right)\overline{u\left(s\right)}$. נחשב:

$$\begin{aligned}\overline{u\left(s\right)} &= \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{h}n_i\overline{\mathrm{Tr}\left(\rho_i\left(s^{-1}\right)u_i\right)}=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{h}n_i\overline{\mathrm{Tr}\left(\tilde{\rho}_i\left(s^{-1}u\right)\right)}=\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{h}n_i\mathrm{Tr}\left(u_i'\rho_i\left(s\right)\right)=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{h}n_i\mathrm{Tr}\left(\rho_i\left(s\right)u_i'\right)=u'\left(s^{-1}\right)\end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\sum_{s\in G}\left|u\left(s\right)\right|^2=\sum_{s\in G}u\left(s\right)\overline{u\left(s\right)}=\sum_{s\in G}u\left(s\right)u'\left(s^{-1}\right)=1$$

כי זהו המקדם של 1, מהגדרת הכפל באלגברת החבורה יחד עם העובדה $u\cdot u'=1$. ∎

1.1 המרכז

עבור כל מחלקת צמידות C האיבר

$$\sum_{c\in C}1\cdot c$$

הוא במרכז. כמו כן, ניתן לחשב על ידי האיזומורפיזם של קודם - זה יהיה מכפלה ישרה של המרכז של חוגי המטריצות, שהן פשוט המטריצות הסקלריות - כלומר, $\mathbb{C}^h$.

ראינו שאם $x=\sum u\left(s\right)s$ במרכז, $u\left(s\right)$ שלם אלגברי לכל s, אזי x שלם אלגברי.

כך הראינו למשל שהממד של הצגה אי פריקה מחלק את $|G|$. יותר מזה, הוא מחלק את $[G:Z\left(G\right)]$.

כעת, יהי χ כרקטר ממימד n. אזי לכל $g\in G$ מתקיים $|\chi\left(g\right)|\leq n$, שכל זהו סכום של הערכים העצמיים של המטריצה המתאימה, שהיא מסדר סופי - לכן זה סכום של שורשי יחידה. $\chi\left(g\right)=n$ אם ורק אם $\rho\left(g\right)=1$.

כעת, נניח $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ הם שורשי יחידה, וגם כי $a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ שלם אלגברי. אזי $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$ או $a=0$.